דביר חדד

<u>אלגברה מופשטת 1 – תרגול 1</u>

שם המתרגלת לואי פולב. התרגול ינוהל דרך הmath-wiki.com. הציון הסופי יהיה מורכב מ- 90% בחינה ו10% בוחן. הבוחן יערך בערך בשבוע הרביעי. הוא יכלול תרגילים משיעורי הבית-וזו המוטיבציה להכין את ש״ב. מהתרגילים שאחרי הבוחן יורכב המבחן. חשוב מאוד להכיר את כל ההגדרות בעל פה.

<u>תורת החבורות-הגדרות</u>:

1. תהי S קבוצה לא ריקה. פעולה בינארית על S היא פונקציה דו מקומית * היא $*: SxS \to S$.
2. קבוצה לא ריקה אסוציאטיבית עם פעולה בינארית אסוציאטיביות נקרת אגודה (חבורה למחצה).
3. אגודה S שבה יש איבר יחידה (e) נקראת מונואיד. ז״א ש- $\forall a : e * a = a * e = a$
4. איבר a ב-S נקרא הפיך מימין אם קיים איבר b $a * b = e$.
5. איבר a ב-S נקרא הפיך אם הוא הפיך מימין וגם הפיך משמאל.
6. מבנה S עם פעולה בינארית (סימון: (S,*)) נקרא חבורה אם הוא מונואיד שבו כל איבר הפיך.
על מנת לבדוק שמבנה כלשהו הוא חבורה יש לבדוק:
   א. סגירות הפעולה.
   ב. אסוציאטיביות.
   ג. קיום איבר יחידה.
   ד. קיום איבר נייטרלי.
   ה. קיום הופכי לכל איבר.

הערה בקשר לפעולה הבינארית: ניתן להגדיר פעולה בינארית (פ״ב) ע״י לוח כפל. למשל, אם יש לנו מבנה S={a,b} ניתן להגדיר את הפעולה משמאל. תמיד תמיד תמיד נניח שמדובר בקבוצה שאינה ריקה.

*	a	b
a	b	b
b	b	a

הפעולה אינה אסוציאטיבית שכן מתקיים

$$(a*b)*b = b*b = a$$
$$a*(b*b) = a*a = b$$

<u>דוגמאות</u>:

1. תהי X קבוצה כלשהו. נביט ב-$(P(X), \cap)$. יש לה סגירות ואסוציאטיביות באופן ברור, וקיים לה איבר נייטרלי שהוא X. כעת כבר יש לנו מונואיד. נבדוק אם קיים לכל איבר איבר הופכי, כדי שהוא יהפוך לחבורה. צריך להוכיח שלא קיים כזה ולכן אין היא חבורה. (בהנחה שמדובר בקבוצה לא ריקה כמובן) ולכן $(P(X), \cap)$ הוא מונואיד. (תשימו לב ש $A \cap A = A$)
2. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ הן חבורות ביחס לחיבור.
3. $\mathbb{Z}_n$ ולכל $a,b \in \mathbb{Z}_n$ מגדירים פעולה מודולו n כך:
   א. $a \oplus b = \underbrace{a + b\big(mod(n)\big)}_{\text{לוקחים שארית מודולו n}}$. נובע מההגדרה כי $a \equiv b$ או״א $\exists k : a - b = kn$
   ב. $a \odot b = a \cdot b\ (mod n)$.

   איזה סוג של יצור הוא $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$? ניתן לראות שהוא מונואיד, אך אינו חבורה.
4. $(M_n(\mathbb{F}), +)$ חבורה.
5. $(M_n(\mathbb{F}), \cdot)$ מונואיד, לא כל המטריצות הפיכות. (איבר יחידה זה I)

6. עבור שדה כלשהו k נסמן $k^* = k\backslash\{0\}$. נביט בk^* כמבנה כפלי. זאת חבורה.
מה קורה אם נעשה אותו דבר למבנה שהוא לא שדה? $(\mathbb{Z}_n^*,\cdot)$ יכול להיות בכלל לא מבנה אלגברי.(אם n ראשוני הוא הופך לחבורה).למשל: $\mathbb{Z}_6^*$ אינו מבנה אלגברי כי אין סגירות, לדוגמה 2 כפול 3 נותן אפס, שבכלל לא שייך לקבוצה.
7. $n\mathbb{Z} = \{na|a \in \mathbb{Z}\}$. והוא חבורה. (n טבעי)

תרגיל: האם קיים מונואיד שיש בו איבר הפיך מימין אך לא הפיך משמאל?

פתרון: $V = \mathbb{F}^N = \{(x_1, x_2, \dots.)|x_i \in \mathbb{F}\}$. נגדיר $Hom(V) = \{T: V \to V|\text{T העל}\}$. נראה ש$(Hom(V), \circ)$ מונואיד. היא אסוציאטיבית, קומוטטיבית, ואיבר היחידה היא העתקת הזהות. נביט בשני איברים במונואיד הזה: $U(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots), D(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

הבה נביט ב-$UD(x_1, x_2, \dots) = (0, x_2, x_3 \dots), DU(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. בעצם, D הפיך מימין, אבל לא אמרנו כלום לגבי ההפיך משמאל.

העובדה ש$\mathrm{UD} \neq id$ לא מחייבת שD אינו הפיך משמאל . D אינו הפיך משמאל משתי סיבות.

א. אם היה לD הופכי משמאל אז זה היה U (הוכחנו בשיעור את יחידות ההופכיים במבנים אסוציאטיביים)
ב. אם D היה הפיך גם משמאל, אז הוא היה הפיך. אך D אינו הפיך מאחר ואינו חד חד ערכי שכן $\ker(D) \neq 0$. מ.ש.ל. ■.

תרגיל: $Map(X, X)$ קבוצת כל הפונקציות מX לX כאשר X קבוצה אינסופית. מיינו את ההפיכים משמאל ואת ההפיכים מימין.

פתרון:
פונקציה היא הפיכה משמאל או"א היא חח"ע. פונקציה היא הפיכה מימין או"א היא על. (הוכחנו את המשפט/ים בבדידה).

- שימו לב שתרגיל זה פותר לנו בעצם את התרגיל הקודם.

השאלה נשאלת , למה קבוצה אינסופית? כי אם זו קבוצה סופית, כל פונקציה חד חד ערכית היא גם על. ולכן, על מי שהפיך מימין הפיך גם משמאל (הפיך בכללי בצעם)

מ.ש.ל. ■.

תרגיל: האם קיימת אגודה שיש בה איבר יחידה משמאל אך אין איבר יחידה מימין?

פתרון: נתבונן באגודה $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R\right\}$. ביחס לכפל מטריצות, (S,·). ישנם אינסוף איברי יחידה משמאל, כי לכל x בR המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא האיבר יחידה משמאל של $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ וז"א שמתקיים $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. אנחנו מניחים שאין איבר יחידה מימין. נניח בשלילה שיש וננסה למצוא אותו. נסמנו ב-$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.לכל $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אמור להתקיים $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. בפרט, נחפש הפיך ל$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. נקבל מהחישוב שx=1 וy=b ולכן האיבר יחידה תלוי ב-b בכל מטריצה ומטריצה ואינו יחיד, זה אינו ייתכן. מכאן שאין איבר יחידה מימין.

הוכחה ב׳: נניח שיש איבר יחידה מימין, ולכן בגלל שהאגודה אסוציאטיבית נקבל שכל איברי היחידה משמאל שווים אליו, ולכן כל איברי היחידה משמאל שווים, בסתירה למה שמצאנו. מ.ש.ל. ■.

תרגיל ממבחן:

א. הוכיחו כי לכל מונואיד $(X,\cdot)$ הקבוצה $P_*(X)$ (כל תת קבוצה של X חוץ מהקבוצה הריקה) מגדירה מונואיד ביחד לפעולה טבעית $\circ$: $A \circ B = \{a \cdot b |\ a \in A, b \in B\}$

ב. מה הם האיברים ההפיכים של $(P_*(X), \circ)$.

פתרון:

א. נבדוק את התנאים למונאיד:

1. נבדוק אם $(P_*(X), \circ)$ מונואיד. ראשית נראה שהיא אינה ריקה, כי {e} הנקודון של איבר היחידה שייך לה.
2. סגירות: ברור. (נובעת מהיות X מונואיד)
3. אסוציאטיבית (שוב, מהיות X מונואיד)
4. איבר נייטרלי: שוב, הנקודון $\{e\}$.

ב. מה הם האיברים ההפיכים של $(P_*(X), \circ)$?
טענה: ההפיכים הם $A=\{a\}$ כאשר a הפיכים בX. צריך להסביר למה $A = \{a_1, a_2\}$ לא הפיכה אם a_1, a_2 הפיכים? אם היא היתה הפיכה, היה קיים איבר שהפיך לשניהם (לa_1 ולa_2) ולכן נקבל ש$a_1 = a_2$.

<u>חבורת האיברים ההפיכים</u>:

בהינתן מונואיד $(M,\cdot)$ נסמן ב$Gr(M)$ את אוסף האיברים ההפיכים של M.

דוגמה (1): $\mathrm{Gr}\big(M_n(\mathbb{F})\big) = (GLn(\mathbb{F}),\cdot)$

דוגמה (2): $\mathrm{Gr}(Z,\cdot) = \{1, -1\}$

דוגמה (3): $\mathrm{Gr}(\mathbb{Z}, +) = \mathbb{Z}$ ולכן היא חבורה.

<u>הגדרה</u>: נאמר ש* היא פעולה אבלית אם היא קומוטטיבית.

$(S,*)$ חבורה אבלית אם $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{S} : \mathrm{a} * \mathrm{b} = \mathrm{b} * \mathrm{a}$.

דוגמה (1): לא אבלית $(GLn(\mathbb{F}),\cdot)$

דוגמה (2): אבלית $(\mathrm{Mat_n}(\mathbb{F}), +)$.

תרגיל: תהי $(G,\cdot)$ חבורה כך שלכל x שייך לG מתקיים $x \cdot x = x^2 = e$. הוכיחו שG היא חבורה אבלית.

הוכחה: צריך להוכיח שלכל $\forall x, y \in G : xy = yx$.

נוכיח $xyxy = yxxy \rightarrow (xy)^2 = e \rightarrow (xy)^2 = x^2y^2 \rightarrow xyxy = xxyy \rightarrow yxy = xyy \rightarrow xy = yx$
מ.ש.ל. ■