אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 4

18 בנובמבר 2020

1. נתונים שני המספרים הראשונים בסדרה הנדסית:

$$a_1 = i$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(א) מצאו את **מכפלת** 15 האיברים הראשונים בסדרה.

פתרון:

נעביר תחילה את המספרים לייצוג פולרי, ונחשב את המנה:

$$a_1 = \text{cis}\frac{\pi}{2}, a_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$q = \frac{\text{cis}\frac{5\pi}{4}}{\text{cis}\frac{\pi}{2}} = \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \text{cis}\frac{3\pi}{4}$$

כעת, נשים לב שכיון שלכל $1 \leq k \leq 15$ מתקיים: $a_k = a_1 q^{k-1}$, נקבל:

$$\prod_{k=1}^{15} a_k = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdots a_1 q^{14} = a_1^{15} \cdot \left(q \cdot q^2 \cdots q^{14}\right) = a_1^{15} \cdot q^{1+2+\cdots+14} = a_1^{15} \cdot q^{\sum_{k=1}^{14} k}$$

נחשב את הסכום בעזרת סכום סדרה חשבוניים:

$$\sum_{k=1}^{14} k = \frac{14(1+14)}{2} = 105$$

ולכן נקבל:

$$\prod_{k=1}^{15} a_k = a_1^{15} \cdot q^{105} = \left(\text{cis}\frac{\pi}{2}\right)^{15} \cdot \left(\text{cis}\frac{3\pi}{4}\right)^{105} = \left(\text{cis}\frac{15\pi}{2}\right) \cdot \left(\text{cis}\frac{315\pi}{4}\right) = \left(\text{cis}\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(\text{cis}\frac{3\pi}{4}\right) = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) = \text{cis}\frac{9\pi}{4} = \text{cis}\frac{\pi}{4}$$

אפשר גם בדרך טיפה שונה: לכל $1 \leq k \leq 15$ מתקיים:

$$a_k = a_1 q^{k-1} = \text{cis}\frac{\pi}{2} \cdot \left(\text{cis}\frac{3\pi}{4}\right)^{k-1} = \text{cis}\frac{\pi}{2} \cdot \text{cis}\frac{3\pi(k-1)}{4} = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi(k-1)}{4}\right) = \text{cis}\frac{\pi(3k-1)}{4}$$

ועכשיו למכפלה, בעזרת דה־מואבר (כי מכפלה של איברים מהצורה $\text{cis}\alpha$ זה cis של סכום האלפות):

$$\prod_{k=1}^{15} a_k = \prod_{k=1}^{15} \text{cis}\frac{\pi(3k-1)}{4} = \text{cis}\left(\sum_{k=1}^{15} \frac{\pi(3k-1)}{4}\right)$$

נחשב את הסכום:

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{\pi(3k-1)}{4} = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{15} 3k - 1$$

נשים לב שמדובר בסכום סדרה חשבונים, כאשר האיבר הראשון הוא 2, וההפרש הוא 3. לכן נקבל:

$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{15} 3k-1=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{15(2\cdot 2+14\cdot 3)}{2}=\frac{345\pi}{4}=\frac{344\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=86\pi+\frac{\pi}{4}$$

ולכן נקבל:

$$\prod_{k=1}^{15} a_k=\operatorname{cis}\left(\sum_{k=1}^{15}\frac{\pi(3k-1)}{4}\right)=\operatorname{cis}\left(86\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$$

(ב) מצאו את הטבעי הקטן ביותר n עבורו $a_n=a_1$.

__פתרון:__

כידוע, $a_n=a_1q^{n-1}$, לכן כדי שנקבל $a_n=a_1$ דרוש $q^{n-1}=1$. לפי דה־מואבר:

$$q^{n-1}=\left(\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}\right)^{n-1}=\operatorname{cis}\frac{3\pi(n-1)}{4}$$

כעת נרצה $\frac{3(n-1)}{4}$ יהיה מספר שלם זוגי. ולכן נקבל זאת לראשונה עבור $n=9$.

(ג) עבור אילו ערכי n מתקיים: $S_n=0$?

__פתרון:__

נחשב את הסכום:

$$S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

כדי שהסכום יתאפס דרוש שהמונה יתאפס. מתי זה קורה? כאשר $q^n=1$. זה דומה מאוד לסעיף הקודם:

$$q^n=\operatorname{cis}\frac{3\pi n}{4}=1\iff n=8k$$

כלומר, הסכום S_n מתאפס עבור n שהוא כפולה של 8.

2. נתונה סדרה הנדסית שבה $a_1=1-\sqrt{3}\cdot i, a_5=-2$. חשבו את כל האפשרויות עבור a_2.

__פתרון:__

נחשב את האפשרויות עבור המנה:

$$a_5=a_1q^4\Rightarrow q^4=\frac{-2}{1-\sqrt{3}i}=\frac{-2(1+\sqrt{3}i)}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נחשב צורה פולרית:

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1}=1$$

$$\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}+\pi k$$

בגלל המיקום ברביע השלישי נצטרך $\theta=\frac{4\pi}{3}$. בסה"כ קיבלנו את המשוואה:

$$q^4=\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$$

ולכן:

$$q_k=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{4}\right), k\in\{0,1,2,3\}$$

אלו 4 אפשרויות עבור המנה, ובהתאם לכל אחת מהאפשרויות נקבל את האיבר השני:

$$a_2 = a_1 q = (1-\sqrt{3}i)\cdot\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{4}\right)\right)$$

כדי שזה יהיה בצורה יפה נעביר לפולרי את a_1:

$$r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2, \tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}+\pi k$$

הזוית מתאימה לרביע הרביעי ונקבל $a_1 = 2\text{cis}-\frac{\pi}{3}$. לכן:

$$a_2=\left(2\text{cis}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{4}\right)\right)=2\text{cis}\frac{2\pi k}{4}, k\in\{0,1,2,3\}$$

ואם נרצה לחזור להצגה קרטזית:

$$a_2\in\{2,2i,-2,-2i\}$$

3.

(א) יהי z מספר מרוכב הנמצא על מעגל היחידה. הוכיחו: $z+\frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.

פתרון:

נראה תחילה שאם z על מעגל היחידה אז $\frac{1}{z}=\overline{z}$: נציג אותו פולרית: $z=\text{cis}\theta$ (על מעגל היחידה $r=1$). ולכן:

$$\frac{1}{z}=\frac{\text{cis}0}{\text{cis}\theta}=\text{cis}(0-\theta)=\text{cis}-\theta$$

ניזכר שגם עבור הצמוד הוכחנו:

$$\overline{z}=\text{cis}-\theta$$

ולכן קיבלנו בסה"כ $\frac{1}{z}=\text{cis}-\theta=\overline{z}$. כעת נקבל:

$$z+\frac{1}{z}=z+\overline{z}=2Re(z)\in\mathbb{R}$$

(ב) z_1, z_2 הם מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה. נתון: $Im(z_1), Im(z_2)>0$ (כלומר, החלקים המדומים שלהם חיוביים). הוכיחו: אם $z_1+\frac{1}{z_1}+z_2+\frac{1}{z_2}>2$ אז z_1, z_2 נמצאים ברביע הראשון.

פתרון:

נשים לב שלפי הסעיף הקודם נקבל:

$$z_1+\frac{1}{z_1}+z_2+\frac{1}{z_2}=z_1+\overline{z_1}+z_2+\overline{z_2}=2Re(z_1)+2Re(z_2)=2\cdot(Re(z_1)+R(z_2))$$

כעת, אם $z_1+\frac{1}{z_1}+z_2+\frac{1}{z_2}>2$, זאת אומרת ש־ $2\cdot(Re(z_1)+R(z_2))>2$, כלומר: $(Re(z_1)+R(z_2))>1$.
טענה: $Re(z_1), Re(z_2)>0$. הוכחה: כמובן שאם שניהם לא חיוביים אז הסכום שלהם לא יהיה חיובי. נב"ש שאחד מהם לא חיובי כלומר $Re(z_1)\leq 0$. כיון ש־ $Re(z_2)\leq 1$ נקבל $Re(z_1)+R(z_2)\leq 1$ בסתירה. לכן שניהם חיוביים. כיון שנתון גם $Im(z_1), Im(z_2)>0$, זה בדיוק אומר ששניהם ברביע הראשון.

4. יהי $w=\text{cis}\theta$ מספר מרוכב. נתון: $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. נתונה סדרה הנדסית שבה $a_1=\frac{1}{w}, a_2=w$. נתון: סכום חמשת איברי הסדרה הראשונים הוא 0 ($S_5=0$).

(א) הוכיחו שכל איברי הסדרה נמצאים על מעגל היחידה.

פתרון:

נראה שהאיבר הראשון על מעגל היחידה, ושהמנה עם רדיוס 1, ולכן כל איברי הסדרה על מעגל היחידה. לפ שאלה 3 סעיף א נקבל:

$$a_1=\frac{1}{w}=\text{cis}(-\theta)$$

וזהו מספר מרוכב עם רדיוס 1, ולכן על מעגל היחידה. כעת למנה:

$$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{w}{\frac{1}{w}}=w^2=(\text{cis}\theta)^2=\text{cis}2\theta$$

וזהו גם מספר מרוכב עם רדיוס 1, ולכן על מעגל היחידה.

(ב) מצאו את כל האפשרויות עבור θ.

<u>פתרון:</u>

נחשב את הסכום:

$$S_5 = a_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

כדי לקבל $S_5 = 0$ דרוש $q^5 = 1$ כלומר:

$$(\mathrm{cis} 2\theta)^5 = 1$$

$$\mathrm{cis} 10\theta = \mathrm{cis}(0 + 2\pi k)$$

$$\theta = \frac{\pi k}{5}$$

שימו לב שיש 10 אפשרויות, כי נקבל תוצאות שונות לכל $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. זה בגלל שהמשוואה שלנו היא עם 2θ, שזה בעצם כמו המשוואה $(\mathrm{cis}\theta)^{10} = 1$.