

# אלגברה מופשטת - תרגיל 2

## שאלה 1

- א. תהי  $G$  חבורה סופית,  $a, b \in G$ . הוכיחו:  $o(ab) = o(ba)$ .
- רמז: אם  $o(ab) = n$ ,  $o(ba) = m$ , הסתכלו על  $(ba)^{n+1}$  ועל  $(ab)^{m+1}$ .
- ב. תהי  $G$  חבורה,  $o(g) = n$ ,  $g \in G$ . הוכיחו ש- $g^a = g^b$  אם ורק אם  $a \equiv b \pmod{n}$ .

## שאלה 2

- א. נגדיר  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ . הוכיחו כי  $G$  חבורה ביחס לפעולת כפל מטריצות, מצאו את הסדר של  $G$  ואת הסדר של כל איבר ב- $G$ .
- ב. תהי  $G$  חבורה. אם לכל  $a, b \in G$  מתקיים  $(ab)^3 = a^3 b^3$  האם  $G$  אבליית?

## שאלה 3

- א. מצאו את הספרה האחרונה של המספר  $79^{207}$ .
- ב. מצאו את הסדר של  $35 \in (\mathbb{Z}_{75}, +)$ .

## שאלה 4

- א. מצא את תת החבורה הציקלית ב- $S_7$  הנוצרת על-ידי התמורה  $(123)(57)$ .
- ב. בדקו שמתקיים  $S_3 = \langle (12), (123) \rangle = \langle (12), (23) \rangle$ .

## שאלה 5

- א. מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 8 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 8 של  $U_{32}$ .
- ב. מצאו בתוך  $(\mathbb{Q}, +)$  שרשרת אינסופית (עולה) של תת חבורות ציקליות.
- רמז: הראשונה נוצרת על ידי 1.

## שאלה 6

תהי  $G$  חבורה. הראו שאם  $a, b \in G$  מתחלפים (כלומר  $ab = ba$ ) אזי  $\langle a, b \rangle$  היא תת חבורה אבלית של  $G$ .

## שאלה 7

- א. הראו ש-  $(\mathbb{Q}, +, 0)$  אינה נוצרת סופית.  
ב. הראו ש-  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  נוצרת סופית. מצאו קבוצת איברים יוצרים.

## שאלת אתגר

- מספר  $n$  נקרא **חופשי מריבועים** אם לא קיים  $p$  ראשוני כך ש-  $p^2$  מחלק את  $n$ . כלומר  $n$  הוא מכפלה של ראשוניים זרים או 1.
- א. מצאו חבורה  $G$  כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים: קיים איבר  $a \in G$  כך ש-  $o(a) = n$ .  
ב. מצאו חבורה  $G$  כך שהסדר של כל איבר בה הוא חופשי מריבועים.  
ג. מצאו חבורה  $G$  כך שלכל  $n \in \mathbb{N}$  חופשי מריבועים מתקיים כי קיים איבר  $a \in G$  כך ש-  $o(a) = n$  ושהסדר של כל איבר בחבורה הוא חופשי מריבועים או  $\infty$ .  
(רמז: מכפלה ישרה של חבורות ציקליות מסויימות. מי הם האיברים מסדר  $\infty$ ?)

**בהצלחה!**