

שאלת אתגר 6 – 112-88 אלגברה לינארית 1

סמסטר א' תשע"ו

דצמבר 2015

בתרגיל זה נעסוק במשוואה הפונקציונלית של קושי. משוואה פונקציונלית היא משוואה, שבה הנעלם הוא פונקציה, והנתון הוא קשר בין הערכים של הפונקציה בנקודות שונות. למשל, אנחנו נחפש פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) + f(y)$$

המשוואה הפונקציונלית הזו נקראת **המשוואה הפונקציונלית של קושי**. לאורך התרגיל, תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת את המשוואה הפונקציונלית של קושי.

שאלה 1. הוכיחו:

א. $f(0) = 0$.

ב. לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

ג. לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

שאלה 2. נסמן $c = f(1)$. הוכיחו:

א. לכל $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = cn$.

ב. לכל $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = cn$.

ג. לכל $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = cr$.

ד. הסיקו: אם f רציפה, אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = cx$.

עד עכשיו כל התרגילים היו תרגילי אינפלי, ובעצם בסעיף ד' בשאלה 2 מצאנו את כל הפתרונות הרציפים למשוואה. כעת נמצא את כל הפתרונות למשוואה.

לצורך כך, יהי B בסיס של \mathbb{R} כמרחב וקטורי מעל \mathbb{Q} (משיקולי עוצמות, $|B| = \aleph^1$). הכוונה בכך ש- B בסיס היא שכל צירוף לינארי מתאפס (עם מספר סופי של מחוברים) הוא הטרוויאלי, ושכל מספר ממשי $x \in \mathbb{Q}$ אפשר לכתוב בצורה

$$x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

עבור $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ ועבור $b_1, \dots, b_n \in B$. בסיס כזה נקרא **בסיס המל Hamel Basis**.

¹הקיום של בסיס כזה תלוי באקסיומת הבחירה, אבל אנחנו פשוט נניח שבאורח פלא יש לנו בסיס כזה.

שאלה 3. הוכיחו כי אם $x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ עם הסימונים הנ"ל, אזי

$$f(x) = \alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n f(b_n)$$

(במילים שתבינו בעוד כמה שיעורים: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ העתקה לינארית כשהשדה הוא \mathbb{Q}).

שאלה 4. הסיקו מהשאלה הקודמת: אם נתונה $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי, אפשר להגדיר $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שתקיים את המשוואה הפונקציונלית של קושי וגם $f|_B = g$.

מסקנה 5. אם קיים בסיס המל של \mathbb{R} מעל \mathbb{Q} , אזי יש פתרונות לא רציפים למשוואה הפונקציונלית של קושי (כי אפשר לבחור g "משוגעת").

כרגיל, כמה הדרכות:

שאלה 1 סעיף ג'. היעזרו באינדוקציה על n .

שאלה 3. ראשית הוכיחו כי $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ לכל $\alpha \in \mathbb{Q}$, ואז היעזרו באינדוקציה על n .