

## תרגיל 6 / ליניארית להנדסה תשעז

להגשה בתרגול, בשבוע המתחיל ב־ י"ח כסלו, 18.12

12 בדצמבר 2016

1. תהי  $A$  מטריצה. הוכח או הפרך:  
א. אם  $A + A^2$  הפיכה אז  $A$  הפיכה.  
ב. אם  $A + A^2$  הפיכה אז  $A$  הפיכה.  
ג. אם  $A^2 = A$  אז  $A = I$  או  $A$  איננה הפיכה.  
ד. אם  $A^{-1}$  יש עמודות אפסים אז  $A$  איננה הפיכה.
2. א. תהיינה  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ . נתבונן בתתי מרחבים  $U = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ ,  $V = \{x \in \mathbb{R}^n | Bx = 0\}$ . מצא מטריצה  $C$  עבורה  $U \cap V = \{x \in \mathbb{R}^n | Cx = 0\}$ . נמק.  
ב. נתייחס ל־  $x \in \mathbb{R}^n$  כוקטור עמודה, ותהי  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  מטריצה. הוכח או הפרך:  $\{x \in \mathbb{R}^n | x^t A = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ .
3. יהי  $V$  מ"ו, ותהיינה  $A, B \subseteq V$  תתי קבוצות. הוכיחו:  $span(A \cap B) = span(A) \cap span(B)$ .
4. יהי  $V$  מ"ו, ויהיו  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in V$  שני וקטורים. הוכח ש־ $u, v$  תלויים ליניארית אם ורק אם  $ad - bc = 0$ .
5. נתון תת המרחב הוקטורי הבא של  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

מצא מערכת מישוואות ליניארית (ניתן לייצגה גם ע"י מטריצה) שאוסף הפתרונות שלה הוא בדיוק  $U$ .

6. האם הקבוצה  $B = \{1 + x^2 + 2x^3, 5 + x + 6x^2 + 13x^3, -3 - x - 3x^2 - 8x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$  תלויה ליניארית? אם כן, מצא צ"ל לא טריוויאלי שנותן 0, אם לא הראה שהצ"ל היחיד שנותן 0 הוא הטריוויאלי.
7. נתבונן ב־  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$   $B = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . האם  $\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in span(B)$ ? אם כן, מצאו את הצירוף הליניארי המתאים.

8. א. יהי  $V$  מ"ו ותהא  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  קבוצה פורשת של  $V$ . הוכח או הפרך:  $S' = \{v_1, v_2, v_1 + v_3\}$  גם קבוצה פורשת.  
ב. יהי  $V$  מ"ו ותהא  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  קבוצה בת"ל. הוכח או הפרך:  $S' = \{v_1 + 2v_2 - v_3, v_2 - v_3, v_1 + v_2\}$  גם בת"ל.