(1) 12.01.14
אנליזה פונ'
הרצאה 12

וקטורים אורתוגונליים: $x \perp y \iff \langle x,y \rangle = 0$

וקטורים אורתונורמליים: $x \perp y$, $\|x\| = \|y\| = 1$

סדרה/קבוצה אורתונורמלית: $x_1, x_2, x_3 \dots$ $\quad x_i \perp x_j$, $\forall i \ \|x_i\| = 1$

רכיב של x לאורך x_1: $\langle x, x_1 \rangle x_1$ [ההטלה של x על תת המרחב שנפרש ע"י x_1 $\{span\{x_1\}\}$]

הטלה של x על $x_1 \dots x_k$ (או במדויק על $span\{x_1 \dots x_k\}$): $\sum_{k=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i$

גרהם-שמידט: בהינתן $y_1 \dots y_n$

$$w_1 = y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$$

$$w_n = y_n - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \langle x, x_k \rangle x_k}_{\text{הטלה}} \qquad w_n \perp x_1 \dots \perp x_{n-1}$$

$$x_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$$

נוסחת פיתגורס: $\|\sum_{k=1}^{n} x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$

שוויון בסל: $\|x - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k}_{\text{הטלה}}\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2$

מסקנה - אי שוויון בסל: $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle^{*}|^2 = \|\sum \langle x, x_k \rangle x_k\|^2$

* החלק של x שנמצא על תת מרחב שנפרש ע"י x_k.

מסקנה: $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2$

מסקנה: $\langle x, x_k \rangle \to 0$?

הגדרה: סדרה אורתונורמלית נקראת שלמה אם כל $x \in H$ ניתן ~~לרשום~~ לרשום כ:
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$$

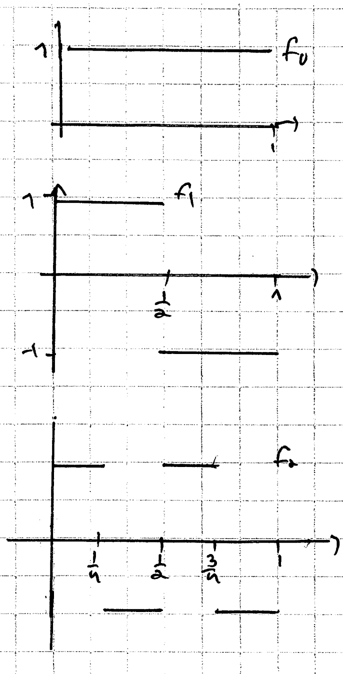
[כלומר $\|x - \sum_{n=1}^{k} \langle x, x_n \rangle x_n\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$]

במקרה זה מתקיים שוויון פרסבל: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2$

בסדרה אורתונורמלית שלמה לכל וקטור יש הצגה יחידה כ $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, $\alpha_n = \langle x, x_n \rangle$

12.01.14 ②
עליזה פונר
הרצאה 10

בסיס האר $L^2([0,1])$



מדוע מרחב אינסופי שלם בן מנה.

<u>הגדרה:</u> מרחב <u>הילברט</u> שיש בו סדרה אורתונורמלית שלמה נקרא <u>ספרבילי</u>
(גם מרחב ממימד סופי נקרא ספרבילי)
במרחב ספרבילי, כל קבוצה אורתונורמלית היא בת מניה (או סופית)

$\mathbb{R}^n$, $\ell^2(\mathbb{R})$ $L^2[\Omega]$ - ספרביליים
Ω תת תחום ב $\mathbb{R}^n$.

<u>הגדרה נוספת:</u> מרחב הוא <u>ספרבילי</u> אם ורק אם יש בו קבוצה צפופה בת מניה.
כלומר, $D \subset H$ בת מניה כך שלכל $x \in H$ יש $y \in D$ כך ש $\|x-y\| < \varepsilon$.

אנחנו תמיד נניח שהמרחבים שלנו ספרבילים. זה נכון בכל הדוגמאות שראינו.

"יש רק מרחב הילברט ספרבילי אינסופי מימדי אחד"

<u>איזומטריה:</u>

דף: העתקה $f: X_1 \to X_2$ בין מרחבים מטריים נקראת איזומטריה אם היא שומרת על מרחקים, כלומר אם:
$$\forall x,y \quad d_{X_2}(f(x), f(y)) = d_{X_1}(x,y)$$

איזומורפיזם גיאומטרי בין מרחבים מטרים הוא איזומטריה שהיא חח"ע ועל.
ואז אומרים שהמרחבים הם אותו דבר - "איזומורפיים"

<u>איזומורפיזם במרחבי הילברט:</u> איזומטריה
העתקה $T: H_1 \to H_2$ נקראת איזומורפיזם של מרחבי הילברט אם:
T לינארית, חח"ע ועל. ! $\langle Tx_1, Tx_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$ $\forall x_1, x_2 \in H$.

שימו לב, שבפרט: $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$

(3) 12.01.14
עליזה פוק
הרצאה 10

משפט: כל שני מרחבי הילברט ספרביליים אינסופי ממדיים הם איזומורפיים

הוכחה: "מספיק" להראות שכל מרחב כזה איזומורפי ל $\ell^2(\mathbb{N})$.

בהינתן מרחב ספרבילי H, ניקח בסיס אורתונורמלי שלו $\{x_n\}$,

ונגדיר: $T: H \to \ell^2(\mathbb{N})$

ע"י $x_n \to e_n$

בסיס סטנדרטי

$(0,0\ldots \overset{\text{מקום } n}{1},0,0\ldots)$

לינאריות של T: $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

מרציפות של T

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \Rightarrow Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

- $\langle x,y \rangle = \sum \alpha_i \beta_i$

הסבר:

$x = \sum \alpha_i x_i$

$y = \sum \beta_i x_i$

$$\langle x,y\rangle = \langle \sum \alpha_i x_i, \sum \beta_i x_i \rangle \underset{\text{לינאריות}}{=} \sum \alpha_i \beta_j \langle x_i, x_j \rangle = \sum \alpha_i \beta_i \underbrace{\langle x_i, x_i\rangle}_{=1} = \sum \alpha_i \beta_i$$

$\langle x_i, x_j\rangle = 0 \quad i \neq j$

- $\langle Tx, Ty \rangle = \langle \sum \alpha_i e_i, \sum \beta_i e_i \rangle = \sum \alpha_i \beta_i$

T שומר על מכפלה פנימית $\Rightarrow$ איזומורפיה.

- קבוצה $S \subset H$. נגיד ש $S \perp x$ אם $x \perp y$ $\forall y \in S$

<u>משלים אורתוגונלי:</u> $S^\perp = \{x : x \perp S\}$ המשלים הניצב של S

S^+ תמיד תת מרחב סגור של H (משתמשים בכך שמכפלה פנימית רציפה בשתי הקורדינטות).

- $x \perp S^+, y \in S^+ \Rightarrow \alpha x + \beta y \perp S^+$
- ? להראות שסגור - אם יש סדרה ב ונקודה להראות שמתכנסת דרך להראות שבגבול המכפלה הפנימית נשמרת.

אם S תת מרחב סגור של H, אז $(S^+)^+ = S$

$H = S \oplus S^+$

<u>**משפט:**</u> אם S תת מרחב סגור של H, אז:

א. $(S^+)^+ = S$

ב. לכל $x \in H$ ניתן לרשום בצורה יחידה כ $x = x_1 + x_2$ כאשר $x_1 \in S$, $x_2 \in S^+$

[דוגמה: $\mathbb{R}^4$: $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$, $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$]

(4) 12.01.14

אנליזה פונק'

הרצאה ב

$L: H \to \mathbb{C}$

פונקציונלים

משפט ההצגה של ריס: בה"ע כל פונקציונל במרחב הילברט הוא מהצורה:

$Lx = \langle x, \overset{\text{קבוע (וקטור יחיד)}}{y} \rangle$

עבור $y \in H$ כלשהו.

ג: לכל $y \in H$ $Lx = \langle x, y \rangle$ הוא פונקציונל לינארי

חסום מ-H ל-$\mathbb{C}$.

$$\langle \alpha x + \beta z, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle z, y \rangle$$

$$\|L\| = \|y\|$$

$A: H \circlearrowleft$ A לינארי

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Ax, y \rangle|$$

כל אופרטור לינארי חסום במרחב הילברט ספרבילי ניתן לתאר כמטריצה אינסופית: (α_{ij})

$\alpha_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$ בסיס אורתונורמלי $\{e_i\}$

הוכחה: $x = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i\right) = \cancel{\sum A \langle x, e_i \rangle e_i}$$

$$= A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\right)$$

רציפות $= \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{i=1}^{n} \overbrace{\langle x, e_i \rangle}^{\text{סקלר}} e_i\right)$

לינאריות $= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle Ae_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle Ae_i$

$Ax = y$ $\quad y = \sum \beta_i x_i = \sum \langle \cancel{y}, e_i \rangle e_i$

$$\langle Ax, e_i \rangle = \langle \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle Ae_j}_{\text{לפי } Ax \text{ שמצאנו למעלה}}, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \underbrace{\langle Ae_j, e_i \rangle}_{\alpha_{ij}} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \langle x, e_j \rangle$$

$$\left(\left(\alpha_{ij} \right) \right) \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle Ax, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Ax, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

(5) 12.01.17
אנליזה פונק'
הרצאה יג

האופרטור הצמוד: $A: H \to H$

$A^*: \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad \forall x,y$ ← אופרטור צמוד

טענה: קיום ויחוד.

- $\|A^*\| = \|A\|$
- $(A^*)^* = A$

הוכ': הוכחה שמאלה דומה להוכחה ימינה

מקרה חשוב: A נקרא צמוד לעצמו אם $A^*=A$

טענה: $T_1 = A+A^*$, $T_2 = A^*A$ $\quad T_1, T_2$ - צמודים לעצמם

זה נובע מטענות אלמנטריות ש $(A+B)^* = A^*+B^*$

$(AB)^* = B^*A^*$

אופרטור נקרא נורמלי אם $A^*A=AA^*$.

- אופרטור U נקרא אוניטרי אם $U^*U = UU^* = I$

טענה: $U: H \to H$ הוא איזומטריה אמ"מ אוניטרי

$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$

- אופרטור חסום A נקרא <u>הפיך</u> אם הוא חח"ע ועל. ואז ניתן להגדיר $A^{-1}: H \to H$:

$$A(A^{-1}x) = A^{-1}(Ax) = x \quad \forall x\in H$$

A^{-1} יהיה בעצמו אופרטור לינארי חסום;

זה לא דוגמה כי לא חח"ע ועל $(x_1,x_2,\dots)\to(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots)$

ערכים עצמיים: λ כך שקיים וקטור עצמי $x\in H$ כך ש $Ax=\lambda x$.

יכולים להיות אינסוף ע"ע.

ספקטרום של A: $spec(A) = \{\lambda : A-\lambda I \text{ לא הפיך}\}$

במימד <u>סופי</u> הספקטרום הוא תמיד קבוצת כל הערכים העצמיים. $spec(A)=\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$

במימד <u>אינסופי</u> זה כבר לא המקרה. יכול להיות ש $A-\lambda I$ לא הפיך ו-λ לא ע"ע

לדוגמה - $Ae_n = \frac{e_n}{n}$, $0\in spec$ אבל 0 לא ע"ע).

יש משפט שמשערך נכונים.- $\forall \lambda\in spectrum(A) \quad |\lambda|\le\|A\|$

$A-\lambda I$ תמיד הפיך עבור $|\lambda|>\|A\|$

(6) 12.01.14
אנליזה פונק'
הרצאה 12

באופרטור צמוד לעצמו , הספקטרום תמיד ממשי!

$$\text{spec}(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$$

? [כפי שהבנו יש לעיתים נצרך שהאופרטור קומפקטי]

<u>אופרטור קומפקטי!</u> "כמעט סופי"

אופרטור ממימד סופי הוא $A : H \to H$ כך שהתמונה של A הוא תת מרחב ממימד סופי של H.
אופרטור נקרא קומפקטי אם $A(\bar{B}_1(0))$ הוא קבוצה קומפקטית

כדור היחידה הסגור במרחב הילברט

$\{Ax : \|x\| \le 1\}$
סגורה אם A רציף

[במימד סופי כדור היחידה הסגור הוא קומפקטי. במימד אינסופי לא.]

מכיוון ~~שכל~~ שבוודאי קבוצה סגורה וחסומה במרחב ממימד סופי היא קומפקטית. כל אופרטור ממימד סופי הוא קומפקטי.
"משפט" - כל אופרטור קומפקטי הוא גבול של אופרטורים ממימד סופי.

⇐ <u>תורה ספקטרלית</u> (הספקטרום של אופרטור) עבור אופרטורים קומפקטיים צמודים לעצמם -

משפט: אם $A : H \to H$ אופרטור קומפקטי צמוד לעצמו אז יש סדרה של ע"ע

$\lambda_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$ וסדרה של ו"ע x_i כך ש- $\|A\| = |\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_n| \ge \dots \to 0$

עם ה λ_i שונים אז "$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x, x_i \rangle x_i$" $\forall x \in H$