אבנר סופר

אוניברסיטת תל אביב

מבוא לפיזיקה מודרנית

מבוא לתורת הקוונטים

גלי חומר

גלי דה ברוילי

פעמים רבות בעבר, הפיזיקה התקדמה ע"י איחוד רעיונות שנתנו פרוש אחד לתופעות שלפני כן נראו שונות. למשל, גרביטציה ניוטונית איחדה נפילת גופים עם תנועת גרמי השמיים, ומקסוול ואחרים איחדו חשמל עם מגנטיות.

בדומה להשגים אלה, ב-1924 הציע סטודנט צרפתי, Louis de Broglie, הצעה מהפכנית בתזה שלו. ההצעה הוותה בסיס תיאורטי אחיד לאור ולחלקיקים:

אם ידוע שלאור יש תכונות של גל וגם תכונות של חלקיק,

אז אולי גם לחלקיקי חומר (למשל, לאלקטרונים) יש כפל תכונות כזה.

התכונות החלקיקיות המובהקות הן תנע ואנרגיה, והגליות הן תדירות ואורך גל.

מאחר שבמקרה של אור קיים הקשר הבא בין התכונות משני הסוגים,

$$E = hf$$

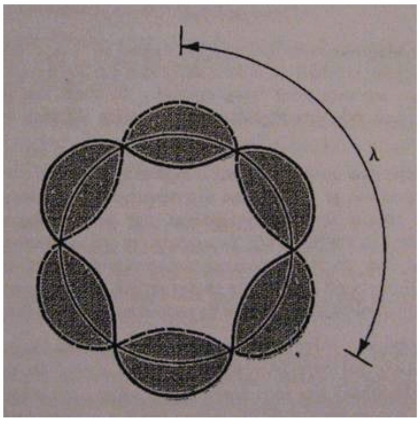
$$p = \frac{E}{c} = h\frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

הציע דה ברוילי שאותו קשר מתקיים במקרה של חומר:

$$f = \frac{E}{h}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

דה ברוילי ציין שבתמונה גלית זו, תנאי הקוונטיזציה של תנע זויתי שהציע בוהר מתקבל מכך שגל האלקטרון מקיים את תנאי השפה המחזוריים שנכפים עליו ע"י הסימטריה הכדורית של האטום, כלומר, עליו להשלים מספר שלם של גלים סביב הגרעין:



כזכור, תנאי הקוונטיזציה של בוהר הוא $pr = n\hbar$.

נציב את יחסי דה ברוילי עבור התנע:

$$\frac{h}{\lambda}r = n\hbar$$
$$2\pi r = n\lambda$$

מאחר ש- $2\pi r$ הוא **היקף המסלול** ברדיוס r, אז רואים שניתן לקבל את תנאי הקוונטיזציה של בוהר ע"י הדרישה הפשוטה שלגל האלקטרון פתרון ייחודי, כלומר, שהוא חוזר על עצמו כל זוית אזימותלית של 2π.

ניתן להבין מדוע קשה להבחין בתכונות הגליות של החומר, כפי שהיה קשה להבחין בתכונות הגליות של האור במשך שנים רבות.
במקרה של אור, הסיבה היתה שאורך הגל של אור נראה הוא מסדר גודל של חצי מיקרון, ולא חשבו לערוך ניסויים באורכי גל קצרים כל כך (יש צורך בהפרדה בין חריצים מסדר גודל של אורך הגל כדי להבחין בהתאבכות).

אז נבדוק מהו אורך גל דה ברוילי עבור חידק טיפוסי בעל נפח של מיקרון מעוקב (נניח כי צפיפותו זהה לזו של מים, כך שמסתו היא $(10^3\ kg/m^3 \times (10^{-6}\ m)^3 = 10^{-15}\ kg$ השוחה במים במהירות של מיקרון לשנייה. אז

$$p = mv = 10^{-15}\ \text{kg}\,10^{-6}\ \text{m/s} = 10^{-21}\ \text{kg m/s}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.6\times 10^{-34}\ \text{j s}}{10^{-21}\ \text{kg m/s}} = 6.6\times 10^{-13}\ \text{m} = 0.0066\ \text{A}$$

זהו אורך קצר מאוד, שנובע מכך שקבוע פלאנק הוא גודל קטן ביחס לגדלים יום-יומיים.

כדי להבחין באורך גל זה עבור החידק, יש צורך

- בסדקים שהמרחק ביניהם דומה לגודל הזה (ואין כאלה!)
  - אנחנו מתעלמים מכך שהחידק גדול מהמרחק בין הסדקים, אבל זה בהחלט מעורר בעיות נוספות בשל האינטראקציה הלא-פשוטה שלו עם הסדקים, התנגשויות לא אלסטיות, וכו'.
- בהרבה חידקים כאלה, כולם באותה מהירות כדי שההתאבכות הבונה תקרה תמיד באותו מקום, וההורסת תמיד במקום אחר.

מובן שגם אם ניסוי כזה אפשרי בעקרון, מאוד קשה לבצעו בהצלחה.

המצב שונה עבור אלקטרונים, שלהם מסה קטנה בהרבה:

נמצא "כלל אצבע" עבור אורך הגל של אלקטרון שמואץ תחת מתח V_0.

ניקח $eV_0 \ll m_e c^2$, כך שהאלקטרון לא יחסותי:

$$E = eV_0 = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2mE}$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{2mE}} = \frac{2\pi\hbar \mathrm{c}}{\sqrt{2mc^2 E}} = \frac{6.28\times 1973\ \text{eV A}}{\sqrt{2\times 0.511\times 10^6\ \text{eV}}\sqrt{E}} = \frac{12.3\ \text{A}}{\sqrt{E/\text{eV}}}$$

כלומר, 12.3Å לשורש אלקטרון וולט (שהוא שורש וולט מתח האצה).

אז עבור ~100V נקבל אורך גל מסדר של אנגסטרם, שמתאים להתאבכות בראג מגביש.

לשם הקבלה, נזכר במקרה של קרני X בעלות אנרגיה E.

במקרה זה, אורך הגל לפי נוסחת פלאנק הוא

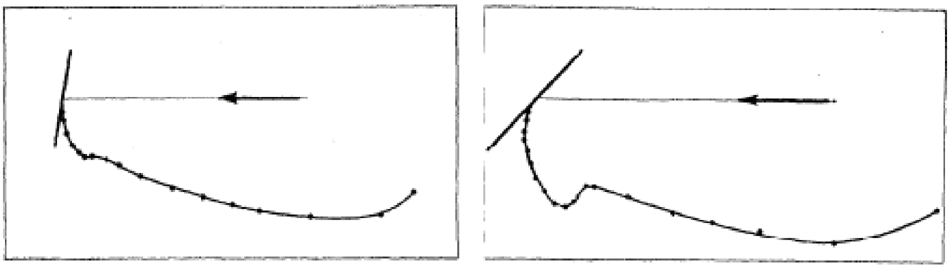
$$E = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{2\pi\hbar \mathrm{c}}{E} = \frac{6.28\times 1973\ \text{eV A}}{E} = \frac{12.4\ \text{A}}{E/k\text{eV}}$$

באותה שנה (1924) פיתח שרדינגר (Erwin Schrödinger) את הרעיון של דה ברוילי לכדי תיאוריה מלאה.

ב-1927 הצליחו Davisson and Germer במעבדות חברת הטלפון Bell לצפות בהתאבכות בין גלי אלקטרונים שפוזרו מגביש ניקל (Physical Review 30, 705).

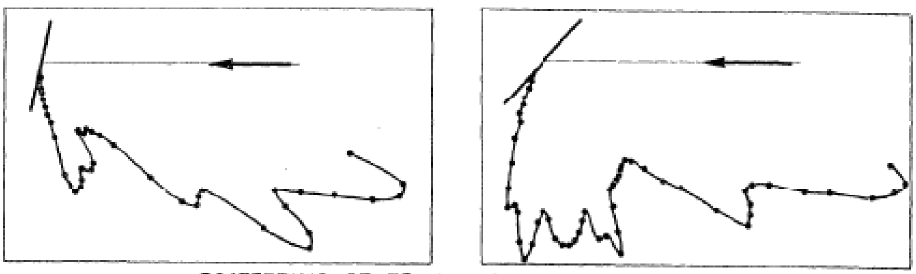
זהו סיפור יפה של תגלית מקרית:
ב-1921 הם ערכו מדידות של פיזור אלקטרונים מבלוק של ניקל, ללא קשר לגלי אלקטרונים.
הנה ציור של תוצאות טיפוסיות.
רואים את כוון הקרן (חץ) והמטרה (לוח בזוית מסוימת לקרן).
עוצמת הפיזור בזוית מסוימת מתוארת ע"י הוקטור מנקודת פגיעת הקרן במטרה אל כל נקודה מצוירת:



SCATTERING OF 75 VOLT ELECTRONS FROM A BLOCK OF NICKEL (MANY SMALL CRYSTALS)

שימו לב שבלוק מתכת בד"כ מורכב מהרבה מאוד גבישים קטנים, כל אחד מונח בכוון אחר, כך שתמונות אלה מראות פיזור מהרבה גבישונים בכוונים שונים.

בשלב מסוים התפוצצה מערכת הואקום שלהם, ואויר חדר למערכת וחימצן את הבלוק.
כדי לתקן זאת, הם חיממו את הבלוק בסביבה של מימן וואקום במשך זמן רב.
כשחזרו על הניסוי, קיבלו תוצאות כאלה:



SCATTERING OF 75 VOLT ELECTRONS FROM SEVERAL LARGE NICKEL CRYSTALS

הם הסיקו שההבדל בין שני הניסויים הוא שבשל החימום הממושך, המתכת התגבשה מחדש והגבישונים גדלו למספר קטן יותר של גבישים גדולים,
כך שהקרן התפזרה ממספר קטן של גבישים גדולים.

דייויסון וגרמר ערכו חקירות רבות של הפיזור. הנה אחת התוצאות שנתנה פיזור מקסימלי בזוית של $50°$ עבור קרן אלקטרונים שהואצה במתח של 54V (המרחק בין הראשית לקו מציין את עוצמת הקרן המפוזרת בכל זוית):

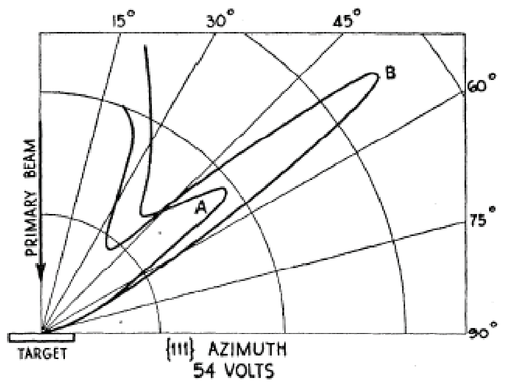


Fig. 13. The "54 volt" beam before and after heating the crystal by electron bombardment. *A*. Original condition as in Fig. 10. *B*. After heating the crystal.

(עוצמת הפיזור גדלה לאחר חימום נוסף של הגביש, שגרם להוצאת גז ממנו ולשיפור אחידות הגביש).

שאלת בית:

1. מהו אורך גל דה ברוילי עבור אלקטרון שמואץ תחת 54V?
2. הזוית שמצוינת בציר ה-x של הגרף למעלה (ציור 13 במאמר של גרמר ודייויסון) היא הזוית בין הקרן הפוגעת לקרן המוחזרת. בדקו אם שהזוית של עוצמת הפיזור המקסימלי בציור זה מתאימה לתנאי בראג עבור פיזור מקסימלי, אם נתון שהמרחק בין מישורי הגביש, כפי שנמדד באמצעות קרני X, הוא 2.15Å ושהאלקטרונים פוגעים בגביש בזוית ישרה ביחס למישורים אלה. (שימו לב שאת תנאי בראג גזרנו עבור זוית קצת אחרת – הזוית שבין הקרן הפוגעת למישור הגביש. עליכם לעבור בין הזויות. כמו כן, שימו לב למרחק בין המישורים המפזרים את האלקטרונים – הוא אינו בדיוק 2.15Å. ראו ציור 5-5 ב-Tipler)

בגרף הבא מראים דייויסון וגרמר בנקודות שחורות את זוית הפיזור שנתנה את העוצמה המקסימלית עבור פיזור ממישורים שונים של הגביש (מישורים שונים הם בעלי מרחק שונה בין המישורים).

הם גם מראים את הקו המצופה שעליו צריכות להיות התוצאות לפי יחסי דה ברוילי ומדידות של המרחקים בין המישורים באמצעות קרני X.

באותו זמן הם לא ידעו מדוע התוצאות באלקטרונים מתאימות רק בקירוב לאלה של קרני X, אבל אח"כ הובן שזה משום שיש לקחת בחשבון את שבירת הגל במעבר לתוך החומר.

השבירה נובעת מכך שהאנרגיה הקינטית של האלקטרון גדלה במידה השווה לפונקצית העבודה של החומר כאשר האלקטרון חודר אל תוך החומר.

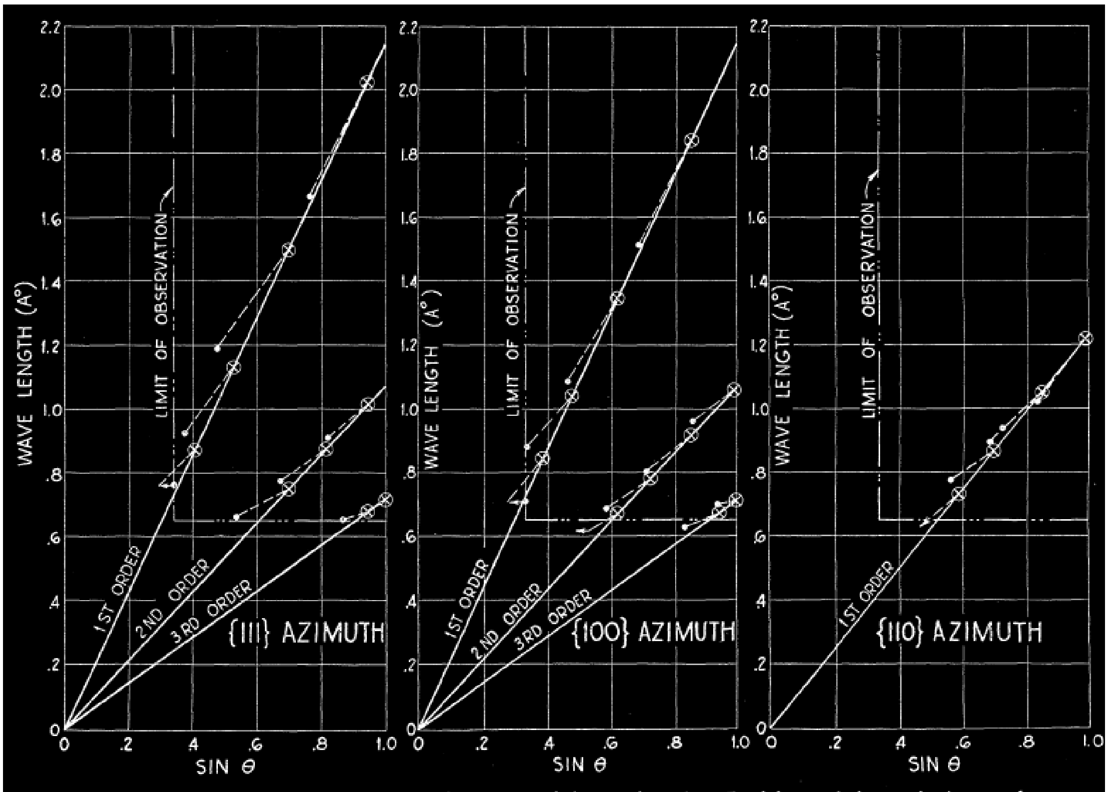


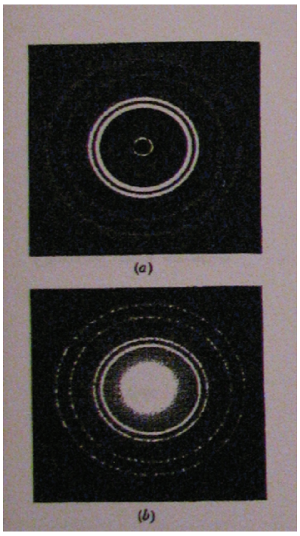
Fig. 17. Plots of the grating formulas in the three prinipal azimuths. Positions of theoretical x-ray beams are indicated by crossed circles and positions of actual electron beams by dots.

באותה שנה (1924) מדד גם G.P. Thomson (בנו של מגלה האלקטרון J.J. Thomson, זכה בפרס נובל ביחד עם דייויסון) פיזור בראג של אלקטרונים.

תומסון השתמש ברדיד מתכת שבו גבישונים רבים. אם מישור של גבישון מסוים נמצא בזוית קוטבית θ ביחס לקרן כך שמתקיימים תנאי בראג, הוא יגרום לפיזור חזק בזוית 2θ.

המישורים של גבישונים שונים יכולים להיות בזויות אזימותליות שונות, כך שכל אחד מהם מפזר בזוית אזימותלית שונה.

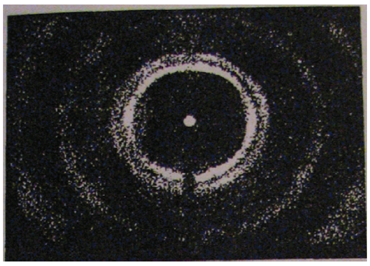
לכן התוצאה היא שמתקבלת טבעת בזוית 2θ ביחס לקרן. לדוגמה, הנה תבנית ההתאבכות שמתקבלת מאלקטרונים מואצים תחת 600V (אורך גל דה ברוילי של 0.5Å), מושווית להתאבכות של פוטונים בעלי אורך גל דומה מאותה המטרה:



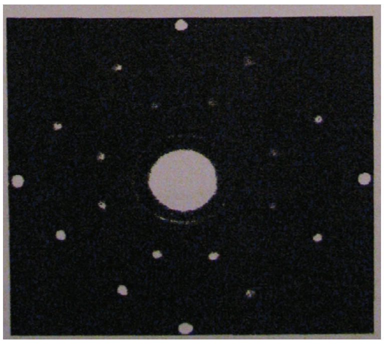
התאבכות קרני X (λ=0.71Å) ממטרת אלומיניום

התאבכות אלקטרונים (λ=0.5Å) מאותה מטרה

תוך שנים ספורות הצליחו לקבל התאבכות לא רק עם אלקטרונים אלא גם עם ניוטרונים:



התאבכות ניוטרונים
על מטרת נחושת



התאבכות ניוטרונים
מגביש מלח יחיד (תבנית Laue)

ואח"כ גם עם אטומי מימן והליום.

שאלת בית: מהי המהירות שבה על גרעין הליום לנוע על-מנת שיהיה לו אורך גל מסדר גודל של Å?

תכונות של גלים

מאחר שחלקיקים בעלי מסה (אלקטרונים, למשל) מפגינים תופעות גליות של התאבכות ועקיפה, עלינו להבין כעת מהן התכונות של גלים שמתאימות לתיאור של חלקיקים כאלה.

גלי חלקיקים בעלי מסה (למשל, אלקטרונים) מקיימים משוואה שנקראת משוואת שרדינגר, אותה נלמד יותר מאוחר, ששונה במקצת ממשוואת הגלים.

אך בכל זאת, לפתרונות של משוואת שרדינגר תכונות רבות שהן טיפוסיות לגלים שהם פתרונות של משוואת הגלים.

לכן נעבור שוב על תכונות כלליות של גלים:

משוואת הגלים ופתרונות יסודיים:

נחשוב על מיתר גמיש, כגון בכינור, שמתוח בכוון x ויכול להתנועע בכוון הניצב (y).

מחוקי ניוטון נגזרת משוואת הגלים עבור תנועה בכוון זה:

$$\frac{d^2 y(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2 y(x,t)}{dt^2}$$

כאשר עבור מערכת זו מהירות הגל היא $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, כש- T הוא המתיחות במיתר ו- ρ צפיפות המסה שלו.

המשוואה נפתרת ע"י כל פונקציה גזירה פעמיים מהצורה $y(x \pm vt)$.

כבר הראינו שסימן – הוא כאשר הגל מתקדם בכוון x+ וסימן + הוא גל שמתקדם בכוון x–.

פתרונות הרמוניים:

פתרונות שימושיים במיוחד הם "גל הרמוני" או "סינוסואידלי", מהצורה

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - vt\right)\right] \\ &= y_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \\ &= y_0 \cos\left(kx - \omega t\right) \end{aligned}$$

כאשר $k=2\pi/\lambda$ נקרא **מספר הגל**

ו- $\omega = kv = 2\pi/T = 2\pi f$ היא **התדירות הזויתית**.

כפי שכבר אמרנו (ורואים מהביטוי למעלה), המהירות v שמופיעה במשוואת הגלים קובעת את המהירות בה משתנה הפאזה של הגל (הארגומנט של הפונקציה ההרמונית).

לכן, מהירות זו נקראת **מהירות הפאזה**.

הנקודה בה לפאזה של הגל יש ערך מסוים נעה במהירות זו.

למרות שכתבנו את v בתור קבוע, פעמים רבות היא תלויה ב- k, כפי שנראה בהמשך.

פתרון דומה, רק עם פאזה שונה ב-$\pi/2$, הוא

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t - \pi/2) = y_0 \sin(kx - \omega t),$$

וניתן גם לכתוב פתרון קומפלקסי

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_0 e^{-i(kx-\omega t)} \\ &= y_0\left[\cos(kx-\omega t) - i\sin(kx-\omega t)\right] \end{aligned}$$

פעמים רבות נוח לעבוד עם פתרון קומפלקסי, למשל בניתוח מעגלי AC בחשמל.

מאחר שההזזה של המיתר היא גודל ממשי, משתמע מנוטציה זו שרק החלק הממשי (או רק החלק המדומה – יש חופש להחליט כך או כך) מתייחס **לגודל הפיזיקלי** שאותו מתאר הגל.

עקרון הסופרפוזיציה:

כבר ראינו שעקרון זה, שנובע מכך שמשוואת הגלים לינארית, אומר שסכום של פתרונות של המשוואה הוא גם פתרון.

גם ראינו כיצד עקרון זה אחראי לתופעות התאבכות, כגון ניסוי יאנג ופיזור בראג.

מיד נראה תופעות נוספות שקשורות בסופרפוזיציה.

שאלת בית – גל עומד:

הראו שהסכום של שני גלים הרמונים בעלי אמפליטודות שוות ותדירויות שוות כאשר אחד מתקדם בכוון $+x$ והשני בכוון $-x$ נותן גל מהצורה $y(x,t) \propto \cos kx \cos \omega t$. גל כזה נקרא **גל עומד**, משום שאינו מתקדם. למשל, שיאי הגל נמצאים תמיד באותן נקודות ($x=2\pi n/k$).

שימו לב שזו צורת פונקצית הגל שפגשנו כשדיברנו על קרינת גוף שחור – גל שהתאפס על דפנות התא.

צפיפות האנרגיה של גל:

תכונה חשובה של גלים היא שצפיפות האנרגיה הממוצעת פרופורציונית ל**ריבוע פונקצית הגל**.

למשל, נתבונן במיתר בעל צפיפות מסה אורכית ρ שיש לו פונקצית גל עומד

$$y(x,t) = y_0 \cos kx \cos \omega t .$$

נתבונן בקטע קצר של המיתר שאורכו dx.

מהירות התנועה בכוון y של הקטע מתקבלת ע"י נגזרת לפי הזמן. אז רואים שהמהירות פרופורציונית לאמפליטודת הגל: $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \propto y_0$.

האנרגיה הקינטית של הקטע פרופורציונית למהירות בריבוע, כלומר

$$dK = \frac{1}{2}\rho\, dm\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 \propto y_{0^2}^2 .$$

dK משתנה עם הזמן, אבל ממוצע הזמן על-פני ה- $\sin^2$ שמופיע בנגזרת נותן גודל קבוע.

באופן מפורש: נגזור לפי הזמן כדי לקבל את מהירות התנועה בכוון y של הקטע:

$$\frac{dy}{dt} = -y_0 \omega \cos kx \sin \omega t .$$

אז האנרגיה הקינטית של הקטע היא

$$dE = \frac{1}{2}\rho dx\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho dx y_0^2 \omega^2 \cos^2 kx \sin^2 \omega t .$$

ממוצע האנרגיה מתקבל ע"י אינטגרציה בזמן על-פני זמן מחזור. מאחר ש- $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}$,

אז מקבלים

$$\frac{1}{T}\int_0^{T=2\pi/\omega} \frac{dE}{dx} dt = \frac{1}{4}\rho y_0^2 \omega^2 \cos^2 kx = \frac{1}{4}\rho\omega^2 \frac{1}{T}\int_0^{T=2\pi/\omega} y^2 dt ,$$

כלומר, ממוצע הזמן של האנרגיה הקינטית פרופורציונית לממוצע הזמן של ריבוע פונקצית הגל באותו מקום.

גם ממוצע הזמן של **האנרגיה הפוטנציאלית** של המיתר **פרופורציוני לריבוע פונקצית הגל**. הסיבה לכך היא שהמיתר נמצא בפוטנציאל הרמוני שפרופורציוני לריבוע התארכות המיתר, וההתארכות פרופורציונית לאמפליטודה הממוצעת.

אותו הדבר נכון גם עבור גלי אור: פונקצית הגל של אור היא השדה החשמלי ε, וצפיפות האנרגיה של השדה החשמלי פרופורציונית לריבוע השדה: $\frac{dE}{dxdydz} \propto \varepsilon^2$.

הפירוש ההסתברותי של פונקצית הגל

כדי להבין את הקשר בין פונקצית הגל למיקום החלקיק, נתבונן במקרה של גל אלקטרומגנטי.

בגל כזה, פונקצית הגל היא גודל השדה החשמלי ε.

ידוע שצפיפות האנרגיה של גל אלקטרומגנטי פרופורציונית ל- ε^2.

ידוע גם שהאנרגיה בנפח מסוים פרופורציונית למספר הפוטונים באותו נפח.

מכאן נסיק כי

מספר הפוטונים בנפח אינפיניטיסימלי שסביב נקודה מסוימת פרופורציוני ל- ε^2 כלומר, לריבוע פונקצית הגל באותה נקודה.

למשל, בניסוי התאבכות עם שני סדקים, ראינו שקיימים אזורים על המסך בהם פונקצית הגל מתאפסת – כאשר הפרש הפאזה בין הגלים שבוקעים משני הסדקים הוא π.

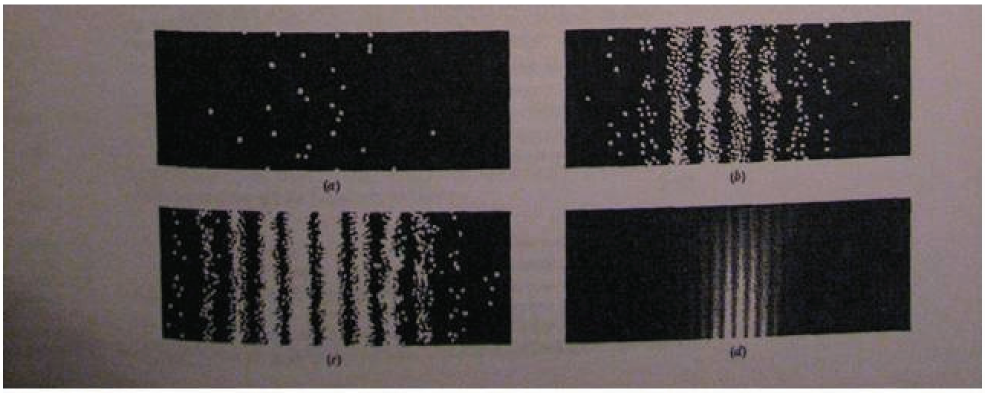
כלומר, באזורים אלה השדה החשמלי מתאפס.

ואכן, אזורים אלה על המסך אינם מראים פגיעות של פוטונים,

ובאזורים בהם פונקצית הגל מקסימלית בשל התאבכות בונה, מספר הפוטונים הפוגעים מקסימלי.

אפשר לבצע את הניסוי עם עוצמת אור נמוכה מאוד, למשל פוטון אחד בשניה בממוצע.

כך נראות התוצאות לאחר פגיעות של בערך 30, 1000, 10,000, ומיליוני פוטנים.



(למעשה, תמונות אלה התקבלו באמצעות אלקטרונים, אך התופעה זהה)

בתמונה a יש מעט מדי פגיעות מכדי שאפשר יהיה להבחין בתבנית ההתאבכות.

שימו לב ש**אי אפשר לחזות בדיוק היכן תהיה פגיעה – מיקום הפגיעה הוא אקראי.**

אך הפגיעות עדיין משקפות את ההסתברות הממוצעת לקבל פגיעה בכל מקום.

יודעים זאת כי אחרי כ-1000 פגיעות (b) תמונת ההתאבכות מתבררת.

לאחר זמן ארוך יותר, מספר הפגיעות במסך כה גדול, שתבנית ההתאבכות נראית רציפה.

העובדה שאי אפשר לחזות בדיוק היכן תהיה פגיעה אינה נובעת מ

- חוסר דיוק במכשיר המדידה
- או מהבדלים בין פונקציות הגל של הפוטונים השונים.

פונקציות הגל זהות, והמכשיר מדויק – אחרת לא היינו מקבלים את תבנית ההתאבכות לאחר פגיעות רבות.

אלא ש**האקראיות של מיקום הפגיעה היא תכונה קוונטית.**

שימו לב שמאחר שקצב פגיעת הפוטונים יכול להיות איטי מאוד,

ההתאבכות היא לא בין שני פוטונים שונים, אלא בין פונקצית הגל של כל פוטון לעצמה –

ההתאבכות היא בין שני חלקי פונקצית הגל שעברו דרך שני הסדקים.

שימו לב כי **האינטראקציה של הפוטון עם המסך היא תופעה קוונטית בעלת אופי חלקיקי:**

אם מאירים את המסך **באור חלש** ומתבוננים בו לאחר זמן קצר,

לא מקבלים את אותה תבנית התאבכות רק חלשה יותר –

מה שמקבלים הוא **פגיעות בודדות** של פוטונים, **שהתפלגותם המרחבית פרופורציונית לריבוע פונקצית הגל** ε^2.

(מאחר שריבוע פונקצית הגל פרופורציוני לצפיפות האנרגיה, שפרופורציונית לצפיפות מספר הפוטונים: $\varepsilon^2 \propto \frac{dN_{photons}}{dx^3}$)

מכל זה עלינו להסיק כי

ריבוע פונקצית הגל במקום מסוים הוא צפיפות ההסתברות לפגיעה של הפוטון במקום זה.

נסמן את פונקצית הגל ב-$\psi(x,t)$,

כאשר ידוע מהתורה האלקטרומגנטית כי $\psi(x,t) \propto \varepsilon$.

אז ההסתברות לפגיעה בין x ל- $x+dx$ היא $\psi^2(x,t)\,dx$.

מאחר שסך כל ההסתברות שהפוטון יפגע במסך היא 1 (איננו מעונינים במקרה של חורים במסך, אלא רוצים ללמוד על פונקצית הגל) אז פונקצית הגל צריכה להיות **מנורמלת** כך ש

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x,t)dx = 1 .$$

בשלושה מימדים, **ההסתברות למצוא את הפוטון**

(כלומר, ההסתברות שנראה פגיעה שלו במסך או במכשיר מדידה כלשהו)

בנפח $dx\,dy\,dz$ סביב הנקודה (x,y,z) היא

$$\psi^2(x,y,z,t)dxdydz$$

ועל-מנת שהפירוש ההסתברותי יהיה הגיוני, פונקצית הגל מנורמלת בכל המרחב:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x,y,z,t)dxdydz = 1$$

כעת אפשר לחזור על הדיון ולהחליף את המלה "פוטון" במלה "אלקטרון" או כל חלקיק אחר.

מאחר שמספר החלקיקים פרופורציוני לאנרגיה שלהם, אותם שיקולים נכונים גם במקרה זה.

חבורות גלים

אחת התכונות של גלים הרמוניים (נעים או עומדים) היא שהם **פרושים על-פני כל המרחב וכל הזמן**.

הם יכולים לתאר קרן אור של פנס שדולק מזמן $-\infty$ ועד ∞,

או (במקרה של גלים עומדים – שאלת הבית למעלה) גל שחסום בתוך כלי בעל גודל סופי (כגון תנודות של מיתר, של אויר בתוך צינור, או של קרינה בתוך תא – הצורה בה תארנו קרינת גוף שחור).

לעומת זאת, כאשר מדובר בגלים שמתארים חלקיקים, פעמים רבות נרצה לתאר את החלקיק כאשר הוא **ממוקם באזור מצומצם במרחב**, למשל, אלקטרון שנע בין מקור לגלאי.

איך אפשר לעשות זאת באמצעות גלים?

כאן באה לעזרתנו תכונה חשובה של גלים הרמונים:

ניתן לתאר כל פונקציה כסכום של גלים הרמונים בעלי אמפליטודות ותדירויות שונות.

בפרט, נוכל לתאר פונקציה בעלת פרישה מצומצמת במרחב.

הנושא של סכום גלים הרמונים שייך לתחום של טורי פורייה (Fourier) ונלמד בפרוט בקורסים אחרים.

כאן ניגע במקרים הפרטיים ובתכונות הדרושות לנו בלבד.

גל שמתואר ע"י סכום של גלים הרמונים נקרא **חבורת גלים** (Wave packet).

נתחיל עם סכום של שני גלים הרמונים בלבד, נלמד מעט על תכונות החבורה הנוצרת, ומכאן נמשיך לחבורות של אינסוף גלים:

פעימות:

נתבונן בסכום של שני גלים בעלי תדירויות שונות שמתקדמים באותו כוון:

$$\begin{aligned} &y(x,t) = \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right] \\ &= 2\cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta k\, x - \tfrac{1}{2}\Delta\omega t\right)\cos\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right) \end{aligned}$$

כאשר בשוויון האחרון רק הגדרנו את ההפרשים ואת הממוצעים

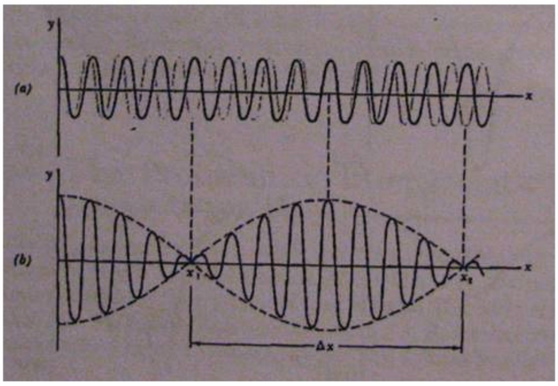
$$\Delta k \equiv k_1 - k_2$$
$$\Delta\omega \equiv \omega_1 - \omega_2$$
$$\bar{k} \equiv \tfrac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$
$$\bar{\omega} \equiv \tfrac{1}{2}\left(\omega_1 + \omega_2\right)$$

אותנו יענין המקרה $\Delta\omega << \bar{\omega},\ \Delta k << \bar{k}$.

אז רואים שהגל הוא מכפלה של שתי פונציות:

פונקציה **מהירה** בעלת תדירות ומספר גל ($\bar{\omega}, \bar{k}$) שדומים לערכים המקוריים $k_1, k_2, \omega_1, \omega_2$

כפול "**מעטפת**" של פונצקיה שמשתנה לאט, כלומר, עם תדירות ומספר גל קטנים (Δk, $\Delta\omega$):



תופעה זו נקראת **פעימות**, משום במקרה של גלי קול שומעים את הגל בעל התדירות הגבוהה אך עם פעימות סינוסואידליות בעלות תדירות נמוכה.

ניסוי פעימות.

נשים לב למספר תכונות של חבורת גלים כזו:

1. ניתן לראות מפונקצית הגל כי מהירות ההתקדמות של הפונקציה המהירה היא $v_p = \dfrac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$.

   נקרא למהירות זו **מהירות הפאזה הממוצעת**.

2. ניתן לראות כי מהירות ההתקדמות של פונקצית המעטפת היא $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$.

מהירות זו נקראת **מהירות החבורה**, v_g, משום שבה מתקדמת התצורה הגדולה שנובעת מהרכבת שני הגלים ("החבורה") ביחד.

3. בואקום או בתווך רציף ואלסטי לחלוטין מתקיים התנאי $\omega_1/k_1=\omega_2/k_2=v$**,** ואז

$v_p=v_g=v$**.**

בתווך אחר קיימת לעתים קרובות תלות של מהירות הפאזה v במספר הגל k.

תופעה זו נקראת **דיספרציה** (Dispersion, התבזרות, משום שהיא גורמת להתרחבות של פונקצית הגל לאחר זמן) והתווך נקרא תווך דיספרסיבי.

במקרה זה מהירות הפאזה הממוצעת ומהירות החבורה שונות.

שאלת בית: הראו כי אם מתקיים התנאי $\omega_1/k_1=\omega_2/k_2=v$, אז $v_p=v_g=v$, ואם תנאי זה אינו מתקיים אז במקרה הכללי מהירות הפאזה ומהירות החבורה שונות זו מזו וגם מ-v.

4. מאחר שפונקצית המעטפת היא הרמונית, קיים **הפרש פאזה של** π בין שתי נקודות סמוכות שבהן הפונקציה מתאפסת ברגע נתון.

כלומר, אם נציין את המרחק בין שתי נקודות אלה ב- Δx, אז הפרש הפאזה ביניהן הוא

$$\tfrac{1}{2}\Delta k\Delta x=\pi$$
$$\Delta k\,\Delta x=2\pi$$

זהו הקשר בין "גודל" החבורה ב-x לבין ההפרש בין מספרי הגל בחבורה.

אם נחזור על תרגיל זה עבור נקודה מסוימת ונסמן את **הפרש הזמן** בין הופעת 0 אחד של פונקצית המעטפת להופעת ה-0 הבא ע"י Δt, אז נמצא כי

$$\Delta\omega\Delta t=2\pi,$$

כלומר**,** זהו ה**קשר בין גודל החבורה בזמן לבין ההפרש בין התדירויות בחבורה.**

סופרפוזיציה של גלים רבים:

כאמור, ניתן לחבר לא רק שני גלים, אלא אינסוף.

הנה סכום אינסופי של גלים מתקדמים, כאשר לכל אחד אמפליטודה כלשהי:

$$y(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(k_n x-\omega_n t)$$

או $$y(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(k_n x-\omega_n t)$$

או $$y(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i(k_n x-\omega_n t)}$$

סכום כזה מאפשר לנו לקבל **כל פונקציה**, אבל רק אם היא פונקציה ***מחזורית***

(מחזור הפוקנציה הוא $2\pi/k_{min}$ במרחב ו- $2\pi/\omega_{min}$ בזמן, כאשר ω_{min} הוא התדירות הנמוכה ביותר בסכום, וכו').

אם נרצה לתאר פונקצית גל של אלקטרון שמיקומו מצומצם לאזור מסוים ומתאפס ב-∞,

כלומר, ***פונקציה שאיננה מחזורית***, יש לעבור ל**סכום רציף**, למשל:

$$y(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-\omega t)}\,dk \; .$$

$A(k)$ נקראת פונקצית ההתפלגות עבור מספר גל k.

היא מתארת את האמפליטודה בחבורה של הגל ההרמוני בעל מספר גל k, כאשר k רציף.

קיימת התאמה 1:1 בין פונקצית הגל $y(x,t)$ ופונקצית ההתפלגות של מספר הגל $A(k)$.

האינטגרל למעלה נקרא "**טרנספורם פורייה**", והוא נותן את הקשר בין שתי הפונקציות.

תכונה חשובה של טרנספורם פורייה היא שככל ש-$A(k)$ צרה יותר, $y(x)$ בזמן מסוים רחבה יותר, ולהיפך, כך שמכפלת הרוחבים של שתי הפונקציות הם מסדר גודל של 1,

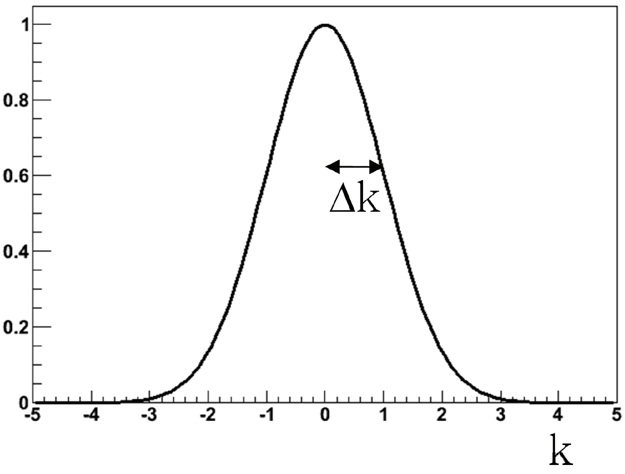
כלומר, $\Delta x\, \Delta k \sim 1$.

קיבלנו רמז לכך מהמקרה של חבורה המורכבת משני גלים הרמונים, שם מצאנו $\Delta x\, \Delta k \sim 2\pi$.

לדוגמה, נתבונן במקרה המיוחד שבו פונקצית ההתפלגות היא פונקצית גאוס במשתנה k,

$A(k)=e^{-\frac{k^2}{2\Delta k^2}}$, כאשר Δk הוא פרמטר שמתאר את הרוחב של הפונקציה.

פונקצית גאוס נראית כך:



למרות שהפונקציה ממשיכה לאינסוף היא דועכת מהר, כך שאפשר לקחת את הרוחב האפקטיבי שלה להיות הפרמטר Δ.

ניתן להראות כי גם פונקצית הגל בזמן מסוים היא פונקציית גאוס:

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2\Delta x^2}}.$$

חישוב מלא (ביצוע טרנספורם פורייה כדי לקבל את $y(x-vt)$ מ- $A(k)$) מראה כי במקרה זה קיים הקשר בין רוחב פונקצית ההתפלגות ורוחב פונקצית הגל:

$\Delta x\,\Delta k=1/2$.

ניתן להראות כי המכפלה $\Delta x\,\Delta k$ של גודל פונקצית הגל בגודל פונקצית ההתפגלות של מספר הגל שלה מקבלת ערך מינימלי עבור פונקצית גאוס, והיא גדולה מ-1/2 עבור כל פונקציה אחרת.

עקרון אי הודאות

כפי שראינו, ריבוע פונקצית הגל של חלקיק (אלקטרון, פוטון, או כל גוף אחר) מתארת את ההסתברות למצוא אותו בניסוי בו מיקומו נמדד, כגון ע"י פגיעה בסרט צילום.

בנקודה בה ל- ψ^2 ערך מקסימלי, ההסתברות היא הגדולה ביותר.

אבל ההסתברות איננה 0 גם במקומות אחרים (אלא רק באלה בהם $\psi=0$).

כדי למקם את החלקיק באזור מסוים, על פונקצית הגל שלו להיות חבורת גלים.

כפי שכבר ראינו,

ככל שחבורת הגלים צרה יותר ב-x, כך רחב יותר התחום של ערכי מספר הגל k

שמהם היא מורכבת.

באופן ספציפי, אמרנו כי $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$,

מאחר ש- $p = \hbar k$, אז נובע כי

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}.$$

זהו עקרון אי-הודאות עבור המיקום והתנע, נוסח ע"י הייזנברג (Werner Heisenberg) ב-1927.

העקרון אומר כי

ככל שהמיקום ידוע טוב יותר (Δx קטן יותר) כך התנע ידוע גרוע יותר (Δp גדול יותר) ולהיפך.

נראה כיצד פיזיקאי קלאסי, שרוצה למדוד את המקום ואת התנע של אלקטרון בדיוק רב,

ינסה להתגבר על עקרון אי הודאות:

הוא ימדוד את מיקום החלקיק בזמן מסוים $x_1(t_1)$, ואז ימדוד אותו שוב בזמן אחר, $x_2(t_2)$.

אז תנע החלקיק הוא $p = mv = m(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$.

כדי לראות את המיקום של משהו, צריך אור.

בשל האופי הגלי של האור, דיוק המדידה של x_2, x_1 שווה בערך לאורך הגל,

כלומר, $\Delta x \sim \lambda$.

לפוטון בעל אורך גל זה יש תנע $p=h/\lambda$,

כך שבפגיעתו באלקטרון הוא ישנה את התנע של האלקטרון בסדר גודל $\Delta p \sim h/\lambda$.

אז רואים ש- $\Delta p \Delta x \sim \frac{h}{\lambda}\lambda = h > \hbar$, והפיזיקאי בכל זאת לא הצליח להתגבר על עקרון אי הודאות.

ככל שינסה למדוד את x באופן מדויק יותר ע"י הקטנת λ,

כך הוא ישנה את התנע שלו במידה גדולה יותר,
כך שבפעם הבאה שימדוד את המיקום (ומתוך זה את המהירות והתנע),
תוצאת המדידה תושפע מהמדידה הראשונה.

באופן דומה, ראינו שחבורת גלים **שממוקמת היטב בזמן** היא בעלת **תחום רחב בתדירות הגל**
(כלומר, מורכבת מרכיבים הרמוניים שמתפרסים על-פני תחום רחב של תדירויות):

$\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$ (ראו שאלת בית).

מאחר ש- $E = \hbar\omega$, אז נובע כי

$$\boxed{\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}}$$

שהוא קשר אי הודאות עבור האנרגיה והזמן.
באופן פרקטי, יחס זה אומר שככל שנרצה לדעת את האנרגיה של חלקיק באופן מדויק יותר, כך עלינו לבצע מדידה ארוכה יותר (בזמן).

דרך לראות זאת היא כדלקמן:
מכוון פסנתרים רוצה לכוון שני מיתרים בפסנתר כך שתהיה להם אותה תדירות בדיוק רב.
הוא פורט על המיתרים ומאזין לפעימות.
הוא מותח או משחרר אחד המיתרים עד שהפעימות נעלמות, ואז ידוע שלמיתרים אותה תדירות.
אך הוא אינו יכול לדעת שהפעימות נעלמו.
הוא רק יכול לדעת שהזמן Δt בין פעימות גדול מזמן ההאזנה שלו.
כבר אמרנו שהזמן בין פעימות קשור להפרש התדירויות בין שני המיתרים לפי $\Delta\omega\Delta t = 2\pi$.
לכן, כדי להקטין מאוד את הפרש התדירות, עליו להאזין לפעימות זמן רב.
מכפלת הדיוק של מדידת התדירות באורך זמן המדידה אינו יכול להיות קטן מ- 2π.
עקרון זה חשוב גם בעיבוד אותות, בתשדורת רדיו, וכו'.

חשוב לציין כי עקרון אי הודאות במכניקת הקוונטים אינו עוסק רק במגבלה של המדידה, אלא בתכונה יסודית של הקשר בין רוחב פונקצית הגל במקום ובתנע, או בין האנרגיה והזמן.

במכניקת הקוונטים זה אומר שלחלקיק אין מקום ותנע.

לחלקיק יש פונקצית גל. כל מה שאפשר למדוד עבור החלקיק (מקום, אנרגיה, וכו') מוגדר ע"י פונקציה הגל, ויחסי אי הודאות הם חלק בלתי נפרד מכך.

אפשר לומר שמכוון הפסנתרים יכול להתגבר על עקרון אי הודאות

אם במקום לחכות עד הפעימה הבאה, הוא ימדוד את החלשות הפעימה.

למשל, אם הפעימה נחלשת ל-3/4 מהמקסימום הוא ידע שעברה פאזה של 30° מאז המקסימום (כי $\cos 30° = \sqrt{3}/2$).

המכוון מנצל כאן את העובדה שהוא עובד לא עם חלקיק קוונטי אחד, אלא עם הרבה חלקיקים – פונונים, קוונטות של קול.

פונונים משחקים תפקיד חשוב בפיזיקה של מצב מוצק, בעל-מוליכות. וכו'.

גם במקרה של התאבכות הפוטונים או האלקטרונים בתמונה למעלה אנו יכולים לומר בדיוק רב מהי המחזוריות של התמונה, אבל רק בתמונה שמורכבת ממספר גדול של פגיעות.

עקרון אי הודאות מתייחס לחלקיק אחד.

אי ודאות מקסימלית:

נתבונן בחלקיק בעל פונקצית גל הרמוני בעל מספר גל יחיד: $\psi = \cos(kx - \omega t)$.

לחלקיק זה מספר גל מוחלט k.

לפי יחסי דה ברוילי, יש לו תנע מובהק $p = \hbar k$,

ומאחר ש- k יידוע עם שגיאה של 0 אז גם p ידוע עם שגיאה של 0.

ומה ידוע על השגיאה במיקום החלקיק?

השגיאה על המיקום היא אינסופית, משום שגל הרמוני פרוש על-פני כל המרחב!

אנרגיית מצב היסוד ועקרון אי הודאות

מודל בוהר הראה לנו שקיימת אנרגיה מינימלית (זו של רמת היסוד) עבור אטום המימן.

תכונה זו נכונה עבור כל מערכת קוונטית, וניתן לראות שהיא קשורה לעקרון אי הודאות:

מערכת קטנה פירושה שפונקצית הגל נפרשת על-פני תחום (Δx) קטן (למשל, ~אנגסטרם אחד).

מאחר ש- $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, Δx קטן פירושו Δp גדול,

כלומר, למערכת יש תנע מינימלי מסדר גודל של Δp,

ולכן גם אנרגיה מינימלית מסדר גודל של $E_{\min} \sim \frac{\Delta p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8m\,\Delta x^2}$.

לדוגמה: ידוע נסיונית שגודל אטום המימן הוא כחצי אנגסטרם.

אז הערכה גסה לאנרגיית רמת היסוד שלו היא

$$E_{\min} \sim \frac{\Delta p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8m\,\Delta x^2} = \frac{(\hbar c)^2}{8mc^2\,\Delta x^2} = \frac{\left(1973\,\mathrm{eV}\,\mathring{\mathrm{A}}\right)^2}{8\times\left(5.11\times10^5\ \mathrm{eV}\right)\times\left(0.5\,\mathring{\mathrm{A}}\right)^2} = 3.8\,\mathrm{eV}$$

זוהי רק הערכה (כזכור אנרגיית רמת היסוד היא $13.6\ \mathrm{eV}$).

שימו לב שיחס אי הודאות הוא אי-שוויון לא שוויון,

וזכרו כי פונקצית הגל איננה פונקצית גאוס, שעבורה המכפלה $\Delta p\Delta x$ היא מינימלית.

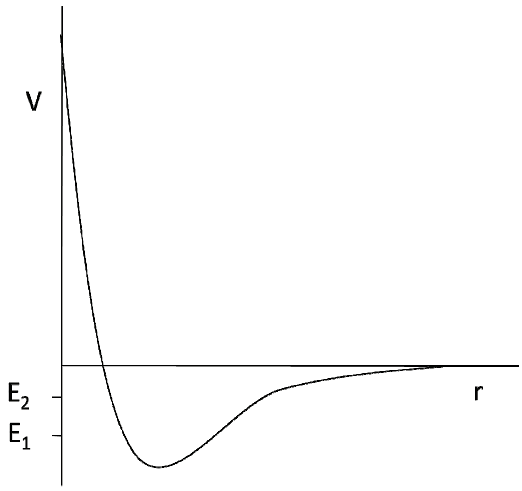
קוונטיזציה של אנרגיה ומצבים קשורים

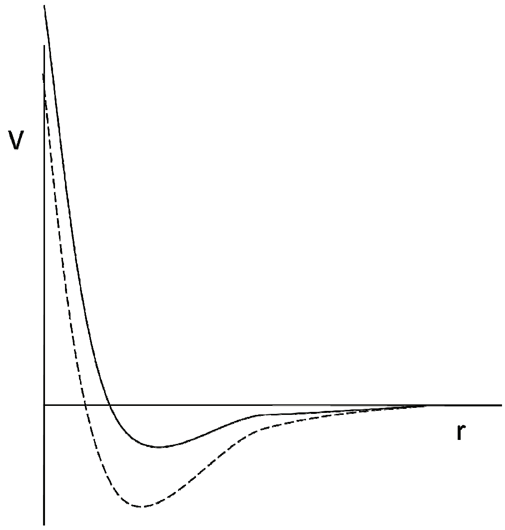
באמצעות עקרון אי הודאות ניתן להבין מדוע במצבים מסוימים חלקיקים (למשל אטומים, נוקליאונים) נקשרים (למולקולות, לגרעינים) ובמצבים אחרים הם לא נקשרים.

נתבונן בגרעין הדאוטרון, שהוא מצב קשור של פרוטון וניוטרון.

ידוע כי גודל הדאוטרון הוא בערך פרמי, ושבמרחק גדול הפרוטון והניוטרון אינם חשים זה את זה.

מכאן ניתן להסיק באופן איכותני כי הפוטנציאל ביניהם נראה כמו הציור משמאל:





כלומר, המינימום הוא בסביבות פרמי אחד, במרחק 0 הפוטנציאל חיובי כדי למנוע "קריסה" של הנוקליאונים, ובמרחק אינסוף הפוטנציאל מתאפס.

בור הפוטנציאל בסביבות פרמי אחד, שנובע מהכוח הגרעיני החזק, קושר את שני הנוקליאונים זה לזה.

הצורה הפונקציונלית של הפוטנציאל קובעת את רמות האנרגיה (באופן מדויק – מתוך פתרונות של משוואת שרדינגר), שסימנו אותן בציור.

למצב היסוד של הגרעין אנרגיה E_1, ולמצב השני אנרגיה E_2.

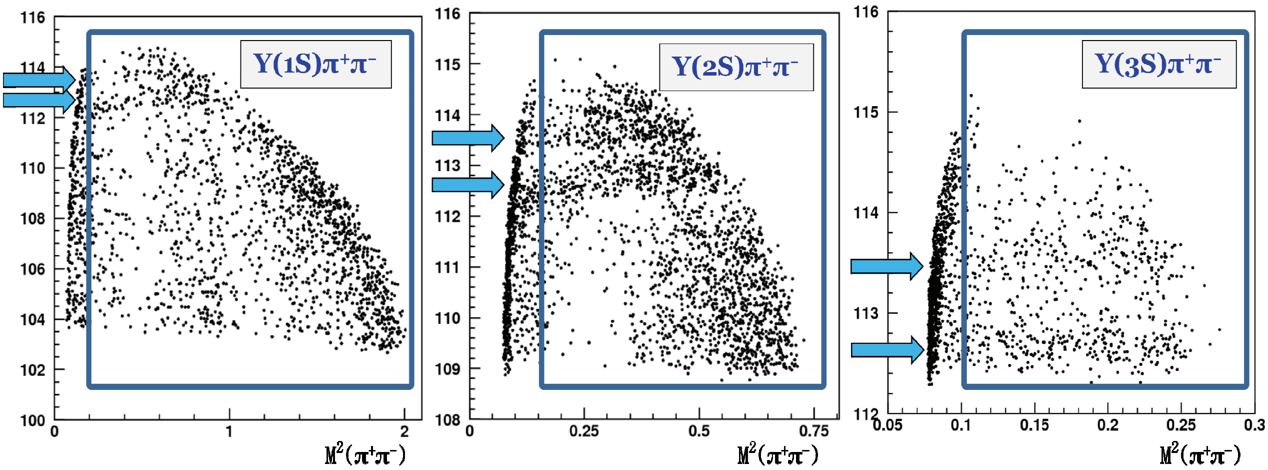
מעקרון אי הודאות ידוע כי ככל שבור הפוטנציאל צר יותר, ההפרש בין רמות האנרגיה גדול יותר.
עבור פוטנציאל קולון, ראינו (מודל בוהר) שקיימים אינסוף מצבים קשורים.
אבל הפוטנציאל הגרעיני צר יותר, ולכן יש בו מספר סופי של מצבי אנרגיה שלילית (בציור ציירנו שניים).

כעת נשאל **מה קורה אם נחליף את הניוטרון בפרוטון**, כדי לקבל גרעין ^{2}He.
אז מתווסף לפוטנציאל הקיים פוטנציאל הדחייה הקולומבית בין הפרוטונים, והפוטנציאל הכולל נראה כמו בציור מימין למעלה 0הקו השבור מראה את הפוטנציאל של הדאוטרון).

באופן קלאסי, בור פוטנציאל זה יכול לקשור את שני הפרוטונים, אם האנרגיה הקינטית של המערכת נמוכה מהערך המוחלט של האנרגיה הפוטנציאלית.

אבל באופן קוונטי, פוטנציאל זה רדוד מכדי שתהיה בו רמת אנרגיה כלשהי, ולכן הוא אינו מסוגל לקשור את שני הפרוטונים.
לכן לא קיים גרעין ^{2}He יציב. גרעין ההליום הקטן ביותר הוא ^{2}He שלו שני פרוטונים וניוטרון. המשיכה בין הפרוטונים לניוטרון מתגברת על הדחייה האלקטרוסטטית ומעמיקה את הפוטנציאל מספיק כדי ליצור מצב קשור.

האם קיימים מצבים קשורים של חלקיקים אחרים, שאינם פרוטון או ניוטרון?
בכנס FPCP בחלקיקים שהתרחש בארץ במאי 2011, דווח לראשונה גילוי של מצב קשור כזה. החלקיקים הקשורים הם B ו-*B או שני *B, ולמצבים הקשורים ניתנו השמות $Z_b(10610)$, $Z_b(10650)$, כאשר המספרים מציינים את מסות החלקיקים ב-MeV.
הנה Dalitz plot (ראו הרצאה על מערכות יחסותיות רב-גופיות) של 3 חלקיקים, בה התקבצויות החלקיקים במסות של מעידה על קיום חלקיקים ה-Z_b:



דואליות: תמונת הגל ותמונת החלקיק

ראינו כי לאור, שניסויים עד סוף המאה ה-19 הראו שהוא גל (התאבכות), יש תכונות שאנו נוהגים לייחס אותן חלקיק קלאסי (קרינת גוף שחור, האפקט הפוטואלקטרי, פיזור קומפטון).
וראינו גם כי לאלקטרון, שנהגנו לחשוב עליו בתור חלקיק (q/m, p=mv, וכו'), יש תכונות גליות (פיזור בראג, כלומר התאבכות).

מסתבר שלכל תופעה – אלקטרון, אור, קול, אטום – יש תכונות שמתאימות לאלה של גל קלאסי, וגם תכונות שמתאימות לאלה של חלקיק קלאסי.

אותו הדבר נכון גם לגבי גופים מאקרוסקופיים, אלא ששם הקירוב הקלאסי עובד בצורה מצוינת, והאספקטים הקוונטיים זניחים.

כשאנו חושבים על גל, אנו מדמיינים גלי ים, וכשחושבים על חלקיק, מדמיינים כדור ביליארד. גלים צריכים להתפשט על-פני תחום רחב, ולחלקיק מקום ומהירות מוגדרים. נראה לנו שאלה שני דברים שונים לחלוטין.

אז איך אפשר ליישב את שתי התפיסות?
האם אלקטרון הוא חלקיק, גל, שניהם, או משהו שונה לחלוטין?

קודם כל, צריך להבין שלפחות במידה מסוימת, מקורו של הבלבול הוא בחוויות היום-יומיות שלנו, וגם קצת בהכשרה הפורמלית שרכשנו בפיזיקה קלאסית.
אילו הגודל שלנו היה לא מטר אלא אנגסטרם, או, לחילופין, אילו קבוע פלאנק היה לא $h = 4\times10^{-15}\ \mathrm{eV\ s}$ אלא מסדר גודל של $\mathrm{j\ s}$, אז היינו חווים תופעות קוונטיות כל הזמן, וההגיון שלנו היה הגיון קוונטי.
מאחר שזה לא המצב, נותר להתנחם בכך שאחרי שעובדים הרבה עם פיזיקה קוונטית מתרגלים גם לתפיסות שלה ומפתחים אינטואיציה מתאימה.

העובדה הנסיונית היא שהתפיסות הקלאסיות והנפרדות של גל ושל חלקיק אינן מתארות נכון את האלקטרון ואת האור, אלא במקרים בהן התפיסות הקלאסיות הן קירוב טוב (מערכת מאקרוסקופית).
כל אחד מהם מתנהג

- כגל קלאסי כאשר מדובר בפרופגציה (התפשטות במרחב)
- וכחלקיק קלאסי כאשר מדובר בהחלפת אנרגיה ותנע עם גוף אחר.

התיאור הקוונטי של זה הוא שכל תופעה (אלקטרון, אור, קול, אטום) **מתוארת ע"י פונקצית גל**, שהיא פתרון של משוואת גל כלשהי.

(עבור אור, המשוואה היא משוואת הגלים $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\psi}{dt^2}$.

את המשוואה המתאימה עבור חלקיקים בעלי מסה – משוואת שרדינגר – נלמד בהמשך.)

לפונקצית הגל תכונות של גל קלאסי – התאבכות ופריסה על-פני אזור רחב.

כאשר ישנה **אינטראקציה שכרוכה בהחלפת אנרגיה ותנע** עם משהו אחר, אז

- פונקצית הגל משתנה בעקבות האינטראקציה,
- מעבר האנרגיה והתנע ניתנים לתיאור באופן חלקיקי קלאסי, כגון בפיזור קומפטון – חוקי השימור של תנע ואנרגיה מתקיימים, והאינטראקציה מתרחשת במקום מסוים.

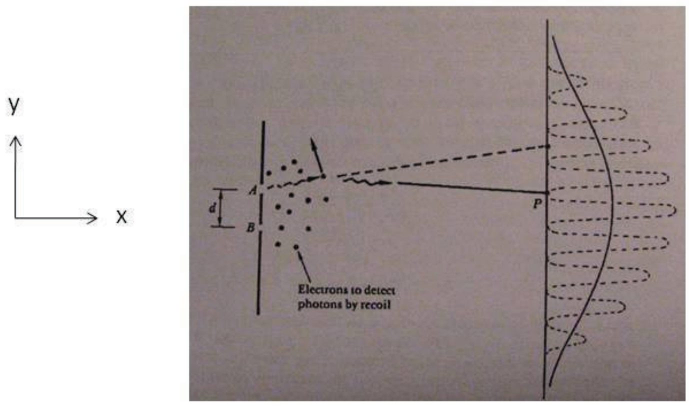
ההסתברות לאינטראקציה במקום מסוים שווה לריבוע פונקצית הגל באותו מקום.

ישנם מקרים בהם תורת הגלים הקלאסית ותורת החלקיקים הקלאסית נותנות את **אותה התוצאה**:

- **אופטיקה גיאומטרית** היא תורה חלקיקית של אור,
  שמתקבלת כאשר אם **אורך הגל << גודל כל גוף או פתח בבעיה**.
  במקרה זה פרופגציה של פונקצית הגל נותנת את התיאור חלקיקי קלאסי.
  לפני שנערכו ניסויים עם אור ועם גופים קטנים, העובדה שאור הוא גל לא היתה ידועה, וכשהתבררה, היה קשה לקבל אותה.
- **כדור רגל:** התנהגותו כחלקיק קלאסי היא קירוב מצוין של התיאור הקוונטי, משום שעבורו, **אורך-גל דה-ברוילי << כל גודל רלוונטי בבעיה** (גודל הכדור, השחקן, וכו').

מה קורה אם מנסים להתחכם לתיאור הקוונטי?

למשל, נתבונן בניסוי התאבכות של אור שנובע משני סדקים:



התאבכות בונה קורית עבור נקודות על המסך שמרחקן לשני הסדקים שווה.

דבר זה קורה עבור $\theta = 0$.

התאבכות הורסת קורית כאשר ההפרש בין המרחקים לשני הסדקים שווה ל-$\lambda/2$.

זה קורה בפעם הראשונה עבור $\sin\theta = \lambda/2d$, כאשר d הוא המרחק בין הסדקים.

מאחר שבד"כ θ זוית קטנה, ניקח בקירוב $\theta \sim \lambda/2d$.

מאחר שתבנית ההתאבכות מתקבלת גם כאשר הזמן בין מעבר שני פוטונים ארוך מאוד,
הסקנו שפונקצית הגל של כל פוטון עוברץ התאבכות עם עצמה.
כלומר, אפשר לומר שהפוטון עובר דרך שני הסדקים בו-זמנית.
אבל נדמה לנו שבתור חלקיק, הפוטון יכול להיות רק במקום מסוים ולכן הוא עובר דרך אחד הסדקים בלבד.
אז נראה לנו שאפשר לנסות לתפוש את הפוטון על חם ולראות דרך איזה סדק הוא באמת עבר.

כדי לעשות זאת, נניח אלקטרון מאחורי אחד הסדקים ופרוטון מאחורי השני.
כשהפוטון יצא מהסדק שדרכו עבר "באמת", נראה פיזור של אלקטרון או של פרוטון ואז נדע דרך איזה סדק עבר הפוטון.
שימו לב שעלינו להבטיח שהאלקטרון (או הפרוטון) נמצא מול הסדק שהועדנו לו.
כלומר, עלינו לדעת את מיקומו ב- y לפחות עד כדי $d/2$.
(אפשר לטעון שיש לדעת את מיקומו הרבה יותר טוב מ- $d/$, אבל בשבילנו זה יספיק).

אז לפי עקרון אי הודאות, אי הודאות על התנע שלו בכוון y היא $\Delta p_y > \dfrac{\hbar}{2d/2} = \dfrac{\hbar}{d}$.

כאשר הפוטון עובר אינטראקציה עם האלקטרון או הפרוטון, הוא מחליף איתם תנע, ואז p_y של הפוטון משתנה בסדר גודל של אותה אי ודאות.
ההשפעה של השינוי הזה ב- p_y של הפוטון על זוית הפיזור שלו היא מסדר גודל של

$$\Delta\theta = \frac{\Delta p_y}{p_x} > \frac{\hbar/d}{h/\lambda} \approx \frac{1}{2\pi}2\theta = \frac{\theta}{\pi},$$

כאשר השתמשנו ב - $\theta \sim \lambda/2d$.
אז רואים שהשינוי בזוית הפיזור הוא מסדר הגודל של הזוית למינימום הראשון על המסך,
כך שתבנית ההתאבכות נהרסת.

דוגמה זו ממחישה כיצד **התכונות הגליות נהרסות כאשר בוחנים את התכונות החלקיקיות**.

העובדה שאי אפשר להביא את התיאוריה לידי פרדוקס ע"י זה שמראים את התכונות החלקיקיות בו-זמנית עם התכונות הגליות

הביאה את בוהר לניסוח עקרון ההשלמה (Principle of complementarity):

התכונות הגליות והחלקיקיות משלימות זו את זו. התיאור של הטבע אינו מלא ללא אחת מהן, אך אי אפשר לבחון את שתיהן בו-זמנית – זה תלוי במערכת הנסיונית שאיתה בוחנים את החלקיק.

חשוב לשים לב שבניגוד לטענות מטה-פיזיות שונות ששומעים על תורת הקוונטים,

מה שחשוב זה לא אם **מישהו** בוחן את המערכת הקוונטית, אלא האינטראקציות שלה עם הסביבה.

אם הסביבה היא כזו שהאינטראקציות הן מעבר אנרגיה ותנע, התוצאות מתאימות לתיאור של חלקיק קלאסי.

אם האינטראקציות הן פרופגציה (התפשטות, התקדמות) במרחב, התיאור הגלי הקלאסי מתאים,

<u>מהירות הפאזה ומהירות החבורה עבור חבורה של אינסוף גלים הרמונים</u>

תיארנו את מהירות הפאזה הממוצעת ואת מהירות החבורה עבור סופרפוזיציה של 2 גלים הרמונים.

אח"כ עברנו לדיון על חבורת גלים שהיא סופרפוזיציה של אינסוף גלים הרמונים.

במעבר זה,

גם מהירות החבורה תעבור מהביטוי הדיסקרטי $v_g = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$

לביטוי הרציף $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$.

מהירות החבורה של חבורת גלים קשורה ל***מהירות הפאזה עבור הרכיבים*** ההרמוניים השונים של הגל, כלומר, לשינוי מהירות הפאזה v כפונקציה של מספר הגל k.

כדי לראות זאת, נכתוב את התדירות הזויתית כפונקציה של מהירות הפאזה ומספר הגל:

$\omega = vk$.

נגזור לפי k ונקבל את מהירות החבורה:

$$\frac{d\omega}{dk}=v+k\frac{dv}{dk}.$$

אז רואים שאם v אינה תלויה ב- k (כלומר, התווך אינו דיספרסיבי),

אז מהירות הפאזה ומהירות החבורה שוות.

ולהיפך: **בתווך דיפרסיבי, מהירות הפאזה ומהירות החבורה שונות.**

הערות:

- ניתן לראות מהביטוי למהירות החבורה v_g שהיא תלויה ב- k,
  אך בד"כ מציינים אותה עבור הערך הממוצע של k.
- בתווך דיספרסיבי, כל רכיב הרמוני נע במהירות שונה, כך שהגל משנה את צורתו עם הזמן, וניתן להראות שהוא מתבזר – עובר דיספרציה.
- לעומת זאת, בתווך לא דיספרסיבי, כל רכיבי הגל ההרמוניים מתקדמים באותה מהירות, ולכן צורת הגל אינה משתנה עם הזמן, ומהירות החבורה שווה למהירות הפאזה.

התלות של ω ב-k נקראת פונקצית הדיספרציה (Dispersion function).

מהי מהירות החלקיק?

נבדוק אם **מהירות הפאזה** היא **המהירות הקלאסית של החלקיק:**

ניקח פונקצית גל חד-מימדית המתארת אלקטרון שמוגבל לנוע במימד x.

לשם פשטות, נתבונן בפונקציה הרמונית:

$$\psi(x,t)=\psi_0 e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$\psi(x,t)=\psi_0\cos(kx-\omega t)$$

או

$$\psi(x,t)=\psi_0\sin(kx-\omega t)$$

מהירות הפאזה של הגל היא

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi / \lambda} = f\lambda = \frac{E}{h}\frac{h}{p} = \frac{E}{p},$$

כאשר בשוויון הלפני-אחרון השתמשנו ביחסי דה ברוילי כדי לעבור מתכונות גליות לחלקיקיות.

אז נראה מהו היחס E/p:

עבור חלקיק בלתי-יחסותי, $E = \frac{p^2}{2m}$,

ואז מהירות הפאזה היא $v_p = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m}$,

שזה רק **חצי** ממהירות החלקיק.

אם כך, מהירות הפאזה איננה מהירות החלקיק.

אז אולי מהירות החבורה $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ של חבורת גלים היא זו שמתארת את המהירות של החלקיק?

זה נשמע הגיוני, כי v_g היא המהירות בה מתקדמת התבנית הרחבה (המעטפת) של חבורת גלים, שמתארת פחות או יותר את מיקום החלקיק.

כדי לבדוק אם v_g היא מהירות החלקיק, נקבל את פונקצית הדיספרציה עבור חלקיק בעל מסה:

יחסי דה ברוילי אומרים כי

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$E = hf = \hbar\omega$$

נשלב זאת עם $E = \frac{p^2}{2m}$,

ונקבל $\hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$,

כלומר $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

נגזור כדי לקבל את מהירות החבורה:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}.$$

ונשים לב שאכן זוהי המהירות של חלקיק בעל תנע p ומסה m.

כאשר ההסתברות לאינטראקציה במקום מסוים נתונה ע"י פונקצית הגל.