

סמסטר ב', מועד ב', תשס"ג
תאריך הבחינה: 7.9.2003
מספר קורס: 1101 – 0366

בחינה בחדו"א 1

מרצה: פאול בירן
מתרגל: ניר לב

משך הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון בלבד.

יש לפתור שאלה אחת מחלק א' ושלוש שאלות מחלק ב'.
אין לענות על יותר שאלות מהנדרש.
מותר להסתמך ללא הוכחה רק על משפטים מההרצאות ומהתירגולים.
בהצלחה!

חלק א'

יש לענות על שאלה אחת בלבד מבין שתי השאלות הבאות.

1. (25 נק') יש להוכיח את המשפט הבא (של Cantor):
תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בקטע (סגור וסופי) $[a, b]$.
אזי f רציפה במידה שווה בקטע $[a, b]$.

2. (25 נק') יש להוכיח את המשפט הבא (של Lagrange):
תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) .
אזי קיים $x_0 \in (a, b)$ כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

הערה: מותר להשתמש ללא הוכחה במשפט *Rolle*.

חלק ב'

יש לענות על שלוש שאלות בלבד מבין ארבע השאלות הבאות (אין להפריד בין תת-שאלות).

3. (25 נק') נתונה הפונקציה $f(x) = x \ln^2 x$ בתחום $(0, \infty)$.

יש לחקור את הפונקציה לפי הנקודות הבאות: תחום רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, אסימפטוטות. יש לשרטט גרף של $y = f(x)$.

הערה: בשרטוט הגרף יש להתחשב בגבולות $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

4. (סה"כ 25 נק') יש לחשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{ב})$$

5. (סה"כ 25 נק')

(א) תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרת מספרים ממשיים בעלת שני גבולות חלקיים בלבד והם $-1, 2$. נגדיר

$$b_n = \frac{2a_n^2 - a_n - 1}{a_n^2 + 1}$$

הוכיחו כי הסידרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.

(ב) יש להוכיח כי $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ לכל $x > 0$.

6. (סה"כ 25 נק')

(א) האם $f(x) = \ln x$ רציפה במ"ש ב- $(0, 1)$? ב- $(1, \infty)$?

(ב) כמה פתרונות ב- \mathbb{R} קיימים למשוואה $|x| + \arctan x = 1$?