

פתרון תרגיל 5

1.א. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{1}{1+2^n x^n}$ בקטע $[1,2]$. עבור x קבוע בקטע $[1,2]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2^n x^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2^n} = 0$$

לכן הסדרה מתכנסת באופן נקודתי ל- $f \equiv 0$. סדרת הפונקציות גם מתכנסת במידה שווה, אפשר

להראות זאת בדיוק כמו שהראינו התכנסות נקודתית ושימוש בכך ש- $\sup_{1 \leq x \leq 2} \left| \frac{1}{1+2^n x^n} \right| = \frac{1}{1+2^n}$

ב. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{1}{1+2^n x^n}$ בקטע $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. נניח x מספר קבוע בקטע $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$,

אם $\frac{1}{2} < x \leq 2$ אז הביטוי $2x$ הוא שבר שגדול מאחד ולכן $2^n x^n \rightarrow \infty$ כאשר $n \rightarrow \infty$. לכן

עבור $\frac{1}{2} < x \leq 2$ נקבל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2^n x^n} = 0$$

אם $x = \frac{1}{2}$ אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

לכן קיבלנו ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2^n x^n} = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2} < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

כיוון שקיבלנו שסדרת הפונקציות הרציפות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית לפונקציה לא רציפה נובע

שההתכנסות היא לא במידה שווה.

ג. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = nxe^{-n^2x}$ כאשר $0 \leq x < \infty$. כדי לחשב התכנסות נקודתית נבדיל בין שני מקרים. אם $x = 0$ אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

אם $x > 0$ אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nxe^{-n^2x} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n^2x}} = 0$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך ש- n הוא ביטוי אלגברי ו- e^{n^2x} הוא ביטוי מעריכי עבור $x > 0$. לכן סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית לאפס. נבדוק התכנסות במידה שווה, לכן קודם נמצא את הערך המקסימלי של הפונקציה $f_n(x)$ לכל n . ע"י גזירה נקבל

$$f_n'(x) = ne^{-n^2x}(1 - n^2x)$$

אם נשווה לאפס ונחלץ את x נקבל $x = \frac{1}{n^2}$ ואז $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}e^{-1}$ וקל לבדוק שזהו ערך מקסימלי (לא מינימלי) של $f_n(x)$. לכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}e^{-1} = 0$$

ולכן ההתכנסות היא במידה שווה.

ד. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n e^{-n^2x}$ כאשר $0 < x < \infty$. נבדוק התכנסות נקודתית, אם $x > 0$,

נחשב את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-n^2x}$. נוכיח שהגבול שווה לאפס שזה שקול להוכיח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x^n e^{-n^2x}) = -\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x^n e^{-n^2x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(x^n) + \ln(e^{-n^2x})) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln(x) - n^2x) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n \ln(x) - n^2x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(x) - nx) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n e^{-n^2x} = 0$. נבדוק אם ההתכנסות היא במידה שווה, נגזור את $f_n(x) = x^n e^{-n^2x}$

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-n^2x}(1 - nx)$$

ואם נשווה לאפס ונחליף את x נקבל $x = \frac{1}{n}$. ע"י חישוב נקבל $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n} e^{-n}$, לכן

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} e^{-n} = 0$$

לכן ההתכנסות היא במידה שווה.

ה. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ כאשר $|x| < \infty$. נבדוק התכנסות נקודתית, אם $t \sim 0$ (כלומר t מאוד קרוב לאפס) אז $\sin(t) \sim t$ ולכן אם x קבוע ו- $n \gg 0$ (כלומר n מספר גדול מאוד)

$$\text{אז } \sin\left(\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n} \text{ לכן}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{x}{n} = x$$

לכן סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = x$. נבדוק התכנסות במידה שווה, נגדיר

לכל n טבעי את הפונקציה $g_n(x) = x - n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ ונמצא את הסופרמום של g_n כאשר $|x| < \infty$.

נתבונן בסדרה $x_n = 2n$, אז

$$g_n(x_n) = g_n(2n) = 2n - n \sin\left(\frac{2n}{n}\right) = 2n - n \sin(2) \geq 2n - n = n \rightarrow \infty$$

כאשר $n \rightarrow \infty$. לכן לכל n טבעי הסופרמום של g_n הוא אינסוף ולכן ההתכנסות היא לא במידה שווה.

ו. נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = (1-x)^{\frac{1}{2n+1}}$ כאשר $0 \leq x \leq 2$. נבדוק התכנסות נקודתית, אם

$x = 1$ אז $f_n(1) = 0$ ולכן הגבול הנקודתי בנקודה זו הוא אפס. אם $0 \leq x < 1$ אז נחשב את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-x)^{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln\left((1-x)^{\frac{1}{2n+1}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2n+1} \ln(1-x)} = e^0 = 1$$

לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ אם $0 \leq x < 1$. באותו אופן אפשר להראות ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = -1$ אם $1 < x \leq 2$.

לכן נקבל ש-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ -1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

כיוון שהפונקציות f_n רציפות והפונקציה הגבולית לא רציפה אז אין התכנסות במידה שווה.

2. א. נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^n(x)$ כאשר $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. נבדוק האם הטור מתכנס במידה שווה. הפונקציה

$f(x) = \sin(x)$ היא פונקציה מונוטונית עולה בקטע $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ולכן גם $\sin^n(x)$ מונוטונית עולה

בקטע זה ולכן $0 \leq \sin^n(x) \leq \sin^n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. לכן נקבל ש-

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} n \sin^n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |\sin^n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{2})^n} < \infty.$$

ולכן ממבחן ה- M נקבל התכנסות במידה שווה.

ב. נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{n}}$ בקטע $[0, 1]$. נבדוק התכנסות במידה שווה, קודם נתבונן בטור

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} - x^n$ ונזכיר שסדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה במידה שווה. אכן

$$\left| \sum_{n=1}^m x^{n+1} - x^n \right| = |x^{m+1} - x| \leq 2$$

והאי שוויון נכון לכל x בקטע $[0, 1]$ ולכל m טבעי. כמו כן סדרה הפונקציות $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

היא מונוטונית יורדת ושואפת במידה שווה לאפס. לכן לפי משפט דריכלה הטור מתכנס במידה שווה.

ג. נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ בקטע $[0, 2)$. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים $\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^m \frac{x^n}{2^n} = x \frac{2 - \frac{x^m}{2^{m-1}}}{2 - x}$

קל לבדוק שהגבול הנקודתי של הסדרה φ_m בקטע $[0, 2)$ הוא $\frac{x}{2-x}$. כעת נגדיר

את הסדרה $g_m(x) = \varphi_m(x) - \frac{2}{2-x} = \frac{x^{2-\frac{x^m}{2^{m-1}}}}{2} - \frac{2}{2-x} = -\frac{x^{m+1}}{2-x}$ כדי להוכיח התכנסות

במידה שווה יש להראות ש- $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x < 2} |g_m(x)| = 0$. אבל ברור שלכל m , $\sup_{0 \leq x < 2} |g_m(x)| = \infty$

ולכן אין התכנסות במידה שווה.

3. א. נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}$ בקטע $[1, 2]$. הטור מתכנס בקטע $[1, 2]$ כי אם $1 \leq x \leq 2$ אז

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} < \infty.$$

כמו כן טור הנגזרות $\sum_{n=0}^{\infty} -2nxe^{-nx^2}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[1, 2]$ כי

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} -2nxe^{-nx^2} \right| \leq 4 \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n} < \infty$$

ולכן ממבחן ה- M הטור מתכנס במידה שווה. לכן ממשפט על גזירה איבר איבר נקבל

$$-\frac{2xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = \left(\frac{1}{1-e^{-x^2}} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} -2nxe^{-nx^2}$$

ובפרט אם נציב $x=1$ נקבל

$$-\frac{2e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -2ne^{-n}$$

א

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n} = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$$

ב. נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n (1+x)^n}{n!}$ כאשר $0 \leq x \leq 2$. נוכיח שהטור מתכנס אם $0 \leq x \leq 2$, אכן

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n (1+x)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} < \infty.$$

כמו כן, טור הנגזרות

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1-x)^n (1+x)^n}{n!} \right)' \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x(1-x)^{n-1} (1+x)^{n-1}}{(n-1)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n-1}}{(n-1)!} < \infty$$

ולכן הטור מתכנס במידה שווה ממבחן ה- M .

נעת נשים לב ש- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n (1+x)^n}{n!}$ שווה ל- e^{1-x^2} . אכן מפיתוח טיילור של e^x נקבל

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב במקום x את הביטוי $1-x^2$ נקבל

$$e^{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^n (1+x)^n}{n!}.$$

כיוון שניתן לגזור איבר איבר כאשר $0 \leq x \leq 2$ נקבל

$$-2xe^{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x(1-x)^{n-1} (1+x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

אם נציב $x=2$ נקבל ונחלק ב-4 נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-3}.$$

4. צריך להוכיח ש-

$$\frac{\arctan(t)}{2} + \frac{t}{2t^2+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)t^{2n+1}}{2n+1} \left(= t - \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} - \dots \right) (*)$$

א. ניעזר בזהות

$$0 \leq x < 1, \quad \frac{1}{(1+x^2)^2} = 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \dots$$

שנובעת מהזהות

$$0 \leq x < 1, \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

מגזירה איבר איבר ואז חלוקה ב- $2x$.

ב. עבור $0 \leq t < 1$ קבוע טור הפונקציות בסעיף א מתכנס במידה שווה בתחום $0 \leq x \leq t$ כי

$$|1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \dots| \leq 1 + 2t^2 + 3t^4 + 4t^6 + \dots < \infty$$

וההתכנסות במידה שווה נובעת ממבחן ה- M .

ג. כעת ממשפט על אינטגרציה איבר איבר של טור חזקות נקבל שעבור $0 \leq t < 1$ קבוע

$$\int_0^t \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^t 1 - 2x^2 + 3x^4 - 4x^6 + \dots dx = \int_0^t dx - 2 \int_0^t x^2 dx + 3 \int_0^t x^4 dx - 4 \int_0^t x^6 dx + \dots =$$

$$t - \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)t^{2n+1}}{2n+1}.$$

כמו כן מהזהות $I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + I_m \frac{2m-1}{2m}$ כאשר $I_m = \int \frac{dx}{(1+x^2)^m}$ נובע

$$\int_0^t \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\arctan(t)}{2} + \frac{t}{2t^2+2} \quad \text{ש- וזה מוכיח את הזהות (*)}.$$