<u>מסקנה</u>: יהיה הכי קל לפתח לפי שורה/עמודה בעלת הכי הרבה אפסים.

<u>משפט</u>: המטריצה A הפיכה אמ"מ הדטרמיננטה שלה איננה מתאפסת.

<u>ע"מ 70, 2.6</u>:

בדוק איזו מהמטריצות הבאות הפיכה כאשר $a,b \in R$:

$|A| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\right| = ab - ba = 0$ לא הפיכה

$|B| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right| = a^2 + b^2$ תהיה הפיכה כאשר a או b שונים מ-0

Σ - חיבור גדול

Π - כפל גדול

<u>תכונות חשובות</u>:

1. אם ב-A שורת/עמודת אפסים אז det(A)=0
2. אם A משולשית (ובפרט אלכסונית) אז $\det(A) = \prod a_{ii}$
3. אם A מטריצת בלוקים משולשית אז $\det(A) = \prod |A_{ii}|$ (כמובן ש A_{ij} הם הבלוקים).
4. דטרמיננטה היא פונקציה כיפלית $|AB| = |A||B|$, בפרט חזקתית $|A^m| = |A|^m$ ובפרט (אם המטריצה הפיכה) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
5. חשוב לציין שפעולות שורה/עמודה משפיעות על הדטרמיננטה, כלומר למטריצות שקולות שורה לאו דווקא תהיה אותה הדטרמיננטה!
כפל בסקלר α של שורה/עמודה i
או בעמודה $R_i + \alpha R_j$
אם נסמן את המטריצות האלמנטריות $E_{i,j}, E_{\alpha\cdot i}, E_{i+\alpha\cdot j}$ כפי שעשינו בעבר אז:
שחלוף שורה/עמודה i,j
$$|E_{i,j}A| = -|A|$$
$$|E_{\alpha\cdot j}A| = \alpha|A|$$
$$|E_{i+\alpha\cdot j}A| = |A|$$
6. כתוצאה מ-5: $|\alpha A| = \alpha^n |A|$
7. $|A| = |A^t|$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$|A|\cdot|A^{-1}| = |AA^{-1}| = 1 \leftarrow |AA^{-1}| = |I|$

$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} \rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$

$\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 2\cdot 2\cdot \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| = 4$

3. יהיו B,A מטריצות כך שידוע $|A| = 2$. חשב $|(A^{-1})^t|$, $|(B^{-1}AB)^9|$, $|B^{-1}AB|$.

$$|(A^{-1})^t| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

$$|B^{-1}AB| = |B^{-1}|\,|A|\,|B| = \underbrace{|B^{-1}|\,|B|}_{=1}\,|A| = |A|$$

$$|(B^{-1}AB)^9| = |A|^9$$

$A \in \mathbb{R}^{101\times 101}$ אנטי סימטרית. הוכיחו A אינה הפיכה

$$A = -A^t \longrightarrow |A| = |-A^t| = (-1)^{101}|A^t| = -1\cdot|A|$$

$$|A| = -|A| \longrightarrow 2|A| = 0 \longrightarrow |A| = 0$$

אנחנו $\mathbb{R}$ב

A לא הפיכה

$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות, $|B| = -3$, $|A| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 100i}$

$$|AB^tA^{-1}B^2| = ?$$

יהי $\alpha\in\mathbb{F}$. נגדיר $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ע"י $A_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ 1 & i\neq j \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \qquad |A|=?$$

1. $\sum R_i \to R_1$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & a \end{vmatrix} =$$

2. $\forall i\neq 1 \quad R_i - R_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & & & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & a-1 & \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

תהי A מטריצה ממשית והפיכה המקיימת $A^4+2A=0$. חשבו את $|A|$.

$$A^4=-2A \longrightarrow |A^4|=|-2A| \longrightarrow \det(A)^4=(-2)^n\cdot\det(A)$$

$$\det(A)^4-(-2)^n\det(A)=0 \longrightarrow \det(A)\left(\det(A)^3-(-2)^n\right)=0$$

$\det(A)\neq 0$

כי נתון הפיכה

$$\det(A)^3-(-2)^n=0$$

$$\det(A)=(-2)^{\frac{n}{3}}$$

שאלה:

תהי A מטריצה ששורותיה תלויות לינארית

a. הוכח/הפרך: כל מינור של המטריצה מקיים $|A_{ij}|=0$

b. תהי A אנטי סימטרית כך ש $|A-I|=2$ חשב את $|A^2+2A+I|$

פתרון:

א) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $|M_{ij}|=1$

ב)

$$|A^2+2A+I| = |(A^2+2A+I)^t| = |A^2-2A+I| = |(A-I)^2| = 4$$

תהיינה A,B מטריצות $n\times n$ כאשר n מספר אי זוגי, מעל שדה שאיננו ממאפיין 2. נתון שמתקיים $AB+BA=0$. הוכיחו שלפחות אחת המטריצות A או B היא לא הפיכה.

$$AB+BA=0 \to AB=-BA \to det(AB)=det(-BA) \to det(A)\cdot det(B)=(-1)^n\cdot det(B)\cdot det(A)$$

כיון ש n אי״ז נכתוב $n=2k+1$ $\quad (-1)^{2k+1}=-1$

$$2\cdot det(A)\cdot det(B)=0$$

לכן $det(A)=0$ או $0=det(B)$ כלומר לפחות אחת מהן לא הפיכה

מטריצה נלווית

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

תהי $A=(a_{ij})\in F^{n\times n}$ אז $adj(A)=(b_{ij})=\left((-1)^{i+j}|M_{ji}|\right)$

טענה: 1. $(\det A)\cdot I = A\cdot adjA$

2. אם A הפיכה אז: $A^{-1}=\frac{adjA}{\det A}$

<u>מסקנות שניתן להסיק:</u>

$adj(I)=I$

$adj(A^t)=(adj(A))^t$

$adjA$ הפיכה $\longleftrightarrow$ A הפיכה

$adj(A^{-1})=(adj(A))^{-1}$

$adj(AB)=adj(B)adj(A) \leftarrow A,B\in F^{n\times n}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$B_{11}=adj(A)_{1,1}=(-1)^{1+1}\cdot 4$

$B_{1,2}=(-1)^{1+2}\cdot 2=-2$

$B_{2,1}=-3$

$B_{2,2}=(-1)^{2+2}\cdot 1$

$adj(A)=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>דוגמא:</u>

תהי $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. מצאו: $adjA, \det A, A^{-1}$

<u>פתרון:</u>

$$adj(A)=\begin{pmatrix} (-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, & (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, & * \\ * & * & * \\ *, & (-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & -1 & 8 \\ -10 & 1 & -5 \\ 29 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$|A|=2\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-0|*|+(-1)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 16-1(29)=32-29=3$$

$A^{-1}=\frac{adj(A)}{3}$

תהי $A \in R^{nxn}$ כך שלכל i,j $a_{i,j} = \pm1$. הוכיחו כי $2^{n-1} \mid \det(A)$.

פתרון:

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right| = 0 = \frac{0}{1}$$

$$\left|\begin{pmatrix}\pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1\\ \pm1 & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ \pm1 & \cdots & \cdots & \pm1\end{pmatrix}\right| \underset{\substack{\text{נעשה זאת}\\ \text{נחסר את } R_1\\ \text{מכל השורות}}}{=} \left|\begin{pmatrix}\pm1 & \pm1 & \cdots & \pm1\\ 0 & \pm2,0 & & \pm2,0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \pm2,0 & \cdots & \pm2,0\end{pmatrix}\right|$$

$$= \underset{\substack{\text{נעשה זאת נחסר את}\\ R_2 \text{ מכל השורות שמתחת.}}}{=} \begin{pmatrix}\pm1 & \cdots & \cdots & \pm1\\ 0 & \pm2,0 & \cdots & \pm2,0\\ \vdots & 0 & \pm4,0 \quad \pm2 \cdots & \pm4,0\\ 0 & 0 & \pm4,0 \cdots & \pm4,0\end{pmatrix} = \cdots \begin{pmatrix}\pm1 & \cdots & \cdots & \pm1\\ 0 & \pm2,0 & \cdots & \pm2,0\\ \vdots & 0 & \pm4,0,2 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 \cdots & \pm2^{n-1},0\end{pmatrix}$$

מקבלת אחרי האלכסון לכל הפחות 2^{n-1} (זאת אומר)

תרגיל:
הוכיח $|adj(A)| = |A|^{n-1}$.
פתרון:

$$A\cdot adj(A) = det(A)\cdot I$$

נחלק למקרים: A הפיכה:

$$\exists A^{-1} \to |A|\neq 0 : |A\cdot adj(A)| = |det(A)\cdot I| \to |A|\cdot |adj(A)| = det(A)^{n}\cdot 1$$

ידוע $|A|\neq 0$ ולכן נחלק בה:

$$|adj(A)| = |A|^{n-1}$$

A לא הפיכה:

$$|A| = 0 \to |A^{n-1}| = |A|^{n-1} = 0$$

נניח בשלילה $|adj(A)|\neq 0$ ← הפיכה. נסמן את ההפכית של $B = adj^{-1}(A)$

$$adj(A)\cdot B = I \longrightarrow A(adj(A)\cdot B) = A$$

$$A(adj(A)\cdot B) = (A\cdot adj(A))\cdot B = |A|\cdot I\cdot B = 0 \Longrightarrow A = 0 \longrightarrow adj(A) = 0 \longrightarrow |adj(A)| = 0$$

א. נתונה הדטרמיננטה : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & l \end{vmatrix} = 2$. מצאו למה שווה הדטרמיננטה:

$B = \begin{vmatrix} l-4c & f & 2l+f \\ m-4a & d & 2m+d \\ n-4b & e & 2n+e \end{vmatrix} = ?$

ב. הוכיחו או הפריכו: אם A היא מטריצה שאיבריה מספרים שלמים וגם האיברים של A^{-1} הם שלמים , אז $|A|^{2000} = 1$.

$$|B| = \begin{vmatrix} l-4c & f & 2l \\ m-4a & d & 2m \\ m-4b & e & 2n \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} l-4c & f & l \\ m-4a & d & m \\ m-4b & e & n \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4c & f & l \\ -4a & d & m \\ -4b & e & n \end{vmatrix}$$

$$-8\begin{vmatrix} c & f & l \\ a & d & m \\ b & e & n \end{vmatrix} = -8\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} a & d & m \\ b & e & n \\ c & f & l \end{vmatrix} = -8\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & l \end{vmatrix} = -8\cdot 2$$

$$\boxed{|B| = -16}$$

ב) אם איברי המטריצה שלמים, גם הדטרמיננטה שלמה

$\sum (-1)^{i+j}|M_{ij}| = det$ $\qquad |A|, |A^{-1}| \in \mathbb{Z}$

$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad-bc \qquad 1 = |I| = |AA^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}|$

המספרים השלמים היחידים שמכפלתם היא אחד הם ± 1

$(\pm 1)^{2000} = 1$

משפט קרמר

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}\ \underbrace{}_{b}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

נתונה מערכת משוואות Ax=b עבור מטריצה ריבועית A מסדר n אשר הדטרמיננטה שלה איננה מתאפסת. אזי אוסף הפתרונות $x_1,...,x_n$ של המערכת מקיימים $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}\ \forall i = 1,...,n$ כאשר A_i מתקבלת ע"י מחיקת העמודה ה-i ב-A והצבת b במקומה.

דוגמא:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}\ \underbrace{}_{B}$$

$$|A| = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\cdot\left|\cancel{8}\right| + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 + 2 = 3$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{3}{3} = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \qquad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \qquad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{6}{3} = 2$$

פתרו בעזרת נוסחת קרמר את המערכת הבאה: $\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ x-y+5z-w=5 \end{cases}$

<u>פתרון:</u>

$$\begin{cases} x-2y=1-z-w \\ x-y=5-5z+w \end{cases}$$

$$A=\begin{array}{cc} x & y \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \end{array} \qquad b=\begin{pmatrix} 1-z-w \\ 5-5z+w \end{pmatrix}$$

$$|A|=1 \qquad |A_1|=\left|\begin{pmatrix} 1-z-w & -2 \\ 5-5z+w & -1 \end{pmatrix}\right| = w+z-1+10-10z+2w = 3w-9z+9$$

$$|A_2|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 1-z-w \\ 1 & 5-5z+w \end{pmatrix}\right| = 5-5z+w-1+z+w = 4-4z+2w$$

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=3w-9z+9$$

$$y=4-4z+2w$$

$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו:

$$\mathrm{rank}(adj(A))=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$r(A)=n$ A הפיכה

$$A\cdot adj(A)=|A|\cdot I$$

$$\underbrace{\frac{A}{|A|}}_{adj(A)^{-1}}\cdot adj(A)=I \longrightarrow r(adj(A))=n$$

$r(A)=n-1$ A לא הפיכה $|A|=0$

$$A\cdot adj(A)=0$$

$$\forall i \quad C_i(adj(A))\subseteq N(A)$$

$$r(A)=\dim(C(A))$$

$$\dim(C(A))+\dim(N(A))=n$$

$$n-1+\underbrace{\dim(N(A))}_{1}=n$$

אך העמודות של $adj(A)$ שייכות ל $N(A)$ שמימדו אחד

$$C(adj(A))\subseteq N(A)$$

$$\dim(C(adj(A)))\le 1$$

$r(adj(A))=1$ (אלא אם $adj(A)=0$)

נוכיח $adj(A)\neq 0$. ידוע $r(A)=n-1$ כלומר יש $n-1$ שורות/עמודות בת"ל

כלומר נוכל לקחת תת-מטריצה מגודל $n-1$ ששורותיה בת"ל.

כלומר מצאנו מינור אחד ששונה מאפס

$r(A)<n-1$ תמיד כשנבנה את המטריצה הצמודה, בכל מינור תהיה לנו שורה/עמודה תלויה באחרות $\leftarrow$ $\forall i,j\ |M_{ij}|=0$ $\leftarrow$ $adj(A)=0$ $\leftarrow$ $0=r(adj(A))$