פתרון תרגיל בית 3 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ה

שאלות המסומנות עם $(-)$ הן יותר קלות, ושאלות המסומנות עם $(+)$ הן יותר קשות.

שאלה 1. בדרך קומבינטורית, קל לראות שהמקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ הוא מספר טבעי (ולא שבר), כי הוא סופר את מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך קבוצה בת n עצמים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה. הוכיחו זאת בדרך אלגברית לפי ההדרכה: תחילה הוכיחו את נוסחת פסקל בדרך אלגברית:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

והעזרו באינדוקציה כדי להסיק שהמקדם הבינומי הוא מספר שלם.

פתרון. כדי להוכיח באופן אלגברי את נוסחת פסקל, נשתמש בהגדרה של המקדם הבינומי ובחיבור שברים אלגבריים:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!((n-k)+k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

עבור ההוכחה האינדוקטיבית, מקרי הבסיס הם $\binom{n}{0} = 1$ לכל n. סכום של מספרים שלמים הוא שלם, ובעזרת נוסחת פסקל המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ הוא סכום של מספרים שלמים לפי הנחת האינדוקציה.

שאלה 2. מה מספר הדרכים להושיב 16 אנשים כך ש-6 אנשים יושבים סביב שולחן עגול והיתר סביב שולחן עגול אחר?

פתרון. מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל הוא $(n-1)!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר במעגל. כלומר יש $\binom{16}{6}5!9!$ אפשרויות להושבת האנשים.

שימו לב שניתן לבחור תחילה את 10 האנשים שישבו בשולחן השני, והתוצאה זהה כי $\binom{16}{6} = \binom{16}{10}$.

שאלה 3. מה מספר הדרכים להושיב 16 אנשים כך ש-6 אנשים יושבים סביב שולחן עגול והיתר על ספסל?

פתרון. מספר הדרכים לסדר n אנשים בשורה הוא $n!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר בשורה. כלומר יש $\binom{16}{6}5!10!$ אפשרויות להושבת האנשים.

שאלה 4. בכיתה יש 30 תלמידים. רוצים לחלק להם כובעים לכבוד מסיבה: 7 כובעי ליצן, 18 מצנפות שינה ו-5 סומבררוס, כך שכל תלמיד יחבוש בדיוק כובע אחד. מה מספר הדרכים לעשות זאת?

פתרון. תחילה נבחר 7 תלמידים מתוך 30 כדי שיחבשו כובע ליצן, ויש $\binom{30}{7}$ אפשרויות כאלו. אחר כך, מתוך $23 = 7 - 30$ התלמידים הנותרים נבחר 18 תלמידים שיחבשו מצנפת שינה, ויש $\binom{23}{18}$ אפשרויות כאלו. שאר התלמידים מוכרחים לחבוש סומבררו, הרי $1 = \binom{5}{5}$. בסך הכל יש $\binom{30}{7}\binom{23}{18}\binom{5}{5} = \frac{30!}{7!18!5!}$ דרכים לבחירה.

שימו לב שהתשובה $\frac{30!}{7!18!5!}$ לא תלויה בסדר של בחירה הקבוצות של הכובעים. תרגיל זה הוא דוגמה למקדם המולטינומי. הסימון של מקדם זה הוא $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ כאשר $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$, והוא סופר את מספר הדרכים לחלק n עצמים שונים (אצלנו 30 התלמידים) ל-m קבוצות (אצלנו שלושת סוגי הכובעים), כך שבקבוצה הראשונה יש k_1 עצמים, בקבוצה השנייה יש k_2 עצמים וכן הלאה.

שאלה 5. ועדת פרס רוצה לחלק סכום של $10{,}000$ ש"ח בין 10 זוכים. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת אם:

1. $(-)$ הפרסים הם מספרים שלמים אי־שליליים?
2. הפרסים הם מספרים שלמים חיוביים (ממש) של ש"ח?
3. הפרסים הם מספרים שלמים אי־שליליים בכפולה של 100 ש"ח?

פתרון. נשתמש כאן כמה פעמים בחלוקה של k כדורים זהים לתוך n תאים. זו בחירה עם חזרה וללא חשיבות לסדר, כלומר $\binom{n+k-1}{k}$ אפשרויות.

1. השאלה שקולה למציאת מספר הפתרונות של

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 10000$$

במספרים שלמים אי־שליליים. כלומר $\binom{10009}{9} = \binom{10+10000-1}{10000}$ דרכים.

2. כאן אנו דורשים שבפתרונות למשוואה שבסעיף הקודם, יתקיים $x_i \geq 1$ לכל i. כלומר בכל תא יש לפחות כדור אחד. כלומר השאלה שקולה למספר הדרכים לחלוקה של $10 - 10000$ כדורים זהים לתוך 10 תאים, שהוא $\binom{9999}{9}$ דרכים.

3. אפשר לחלק את המשוואה מהסעיף הראשון ב-100, ולהגדיר משתנים חדשים $y_i = x_i/100$ שאנו יודעים שהם שלמים. לכן יש $\binom{109}{9} = \binom{10+100-1}{100}$ אפשרויות.

שאלה 6. $(+)$ בחברה עובדים 11 עובדים עם גישה לכספת. הם לא סומכים אחד על השני ורוצים לודא שהכספת תפתח רק אם לפחות 6 עובדים נוכחים. כדי למלא אחר מטרה זו ניתן לשים על הכספת כמה מנעולים, ולחלק לכל עובד מפתחות של חלק מן המנעולים.

כמה מנעולים צריך לכספת, וכמה מפתחות צריך לחלק לכל עובד? (נסו לחסוך במספר המנעולים והמפתחות ככל שניתן.)

פתרון. מספר הקבוצות של 5 עובדים הוא $462 = \binom{11}{5}$. לא נרצה שקבוצה של 5 עובדים תוכל לפתוח את הכספת, ולכן נרצה לפחות $\binom{11}{5}$ מנעולים על הכספת. נמספר את הקבוצות של 5 עובדים ב-A_i ואת המנעולים ב-a_i עבור $1 \leq i \leq \binom{11}{5}$. ניתן מפתח למנעול a_i לכל מי **שלא** נמצא בקבוצה A_i. כל עובד מקבל מפתח שונה בעבור כל קבוצה A_i שאינו שייך אליה, ויש $252 = \binom{11-1}{5}$ קבוצות A_i כאלו.

כעת, נסתכל על קבוצה A_i ספציפית. בודאי שחברי הקבוצה לא יוכלו לפתוח את הכספת, כי אין להם מפתח למנעול a_i. אבל אם נוסיף עובד נוסף לקבוצה, אז בודאי הוא יוכל לפתוח את מנעול a_i. הקבוצה הזאת (אחרי שנוסף עובד נוסף) תוכל לפתוח כל מנעול, שהרי מפתח לכל אחד מן המנעולים חולק ל-$6 = 11 - 5$ עובדים. כלומר, את מנעול a_j לפחות אחד מחברי הקבוצה יוכל לפתוח כי אחד מהם לא השתייך לקבוצה A_j (אפשר להסתכל "הפוך", ולומר כי 5 עובדים בדיוק לא יכולים לפתוח את מנעול a_j, ובקבוצה יש 6 עובדים).

האם אתם מסוגלים למצוא פתרון עם פחות מנעולים? עם פחות מפתחות?

שאלה 7. מחלקת אבטחת מידע דרשה שסיסמאות מחשב תהינה בנויות בדיוק מ-8 ספרות (מתוך 10 ספרות אפשריות) ומ-12 אותיות באנגלית (מתוך 52 אותיות אפשריות). בסיסמה מותר לחזור על ספרות ואותיות. כמה סיסמאות שונות ניתן לבנות? *רמז:* התחילו בספירה של מספר הדרכים לבחור את המיקום של הספרות.

פתרון. סיסמה מורכבת מ-$20 = 12 + 8$ תווים. לפי הרמז, תחילה נבחר את המיקום של הספרות. אחרי שבוחרים את המיקום של הספרות, אז המיקום של האותיות (אך לא איזו אות) נקבע לחלוטין. כלומר אנו בוחרים ללא חזרה וללא חשיבות לסדר 8 מקומות מתוך 20, ויש $\binom{20}{8}$ אפשרויות כאלו.

לכל ספרה בנפרד יש 10 אפשרויות, ולכן יש 10^8 בחירות עבור הספרות. באופן דומה יש 52^{12} אפשרויות לבחירת האותיות. בסך הכל יש $\binom{20}{8}10^8 52^{12}$ סיסמאות שניתן לבנות.

בהצלחה!