$X_0 = (x_0, y_0, z_0)$,$X = (x, y, z)$.
n(וקטור כלשהו הניצב למישור) - $n = (a, b, c)$.
$X - X_0$ נמצא במישור, ולכן ניצב לn⇐$\boxed{n \cdot (X - X_0) = 0}$ $n \neq 0$
$X - X_0$ וקטור ניצב לn - ולכן מקביל למישור.

$$M = \{X | n \cdot (X - X_0) = 0\} = \{(x, y, z) | a (x - x_0) + b (y - y_0) + c (z - z_0) = 0\}$$

משוואה למישור משיק למשטח

M משטח עם פרמטריזציה $(s, y)^{\in D} \to f (s, t) \in M \subset \mathbb{R}^3$. f ממ"ח C^1(הנחה)
$f_s|_{p^0}\ ,\ f_t|_{p^0}$: וקטורים משיקים לM בנק' p^0. $f_s|_{p^0}\ ,\ f_t|_{p^0}$ בת"ל(הנחה), ז"א לא על ישר אחד.
ניקח $n = f_s \times f_t|_{p^0}$($n \neq 0$).
משוואת המישור המשיק $\delta - M$ בנק' p^0 היא $0 = \left(X - p^0\right)$

$$\boxed{f_s \times f_t|_{p^0} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0}$$

משטח הנתון ע"י משוואה מפורשת

$(x, y) \in D$, $z = \varphi (x, y)$ (ממ"ח C^1)

דוגמה

חצי הכדור העליון עם רדיוס R ומרכז 0.

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$D : \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 = R^2\right\}$$

מקרה פרטי של משטח הנתון ע"י פרמטריזציה

הפרמטרים כאן הם (x, y). הפונקציה $f : (x, y)^{\in D} \to (x, y, \varphi (x, y)) \in M \subset \mathbb{R}^3$

$$f_x = (1, 0, \varphi_x)$$

$$f_y = (0, 1, \varphi_y)$$

$$n = f_x \times f_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \varphi_x \\ 0 & 1 & \varphi_y \end{vmatrix} = -\varphi_x i - \varphi_y j + k$$

$$p_0 = (x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))$$

$$-\varphi_x\left(p^0\right)(x - x_0) - \varphi_y\left(p^0\right)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$\boxed{z - z_0 = \varphi_x\left(p^0\right)(x - x_0) + \varphi_y\left(p^0\right)(y - y_0)}$$

משטח הנתון ע"י משוואה

דרך שלישית(כללית יותר) היא לתת משטח ע"י משוואה $F(x,y,z) = 0$

$$M = \{(x,y,z) | F(x,y,z) = 0\}$$

נניח F היא ממח' C^1, $F_z|_{p^0} \neq 0$(כללית יותר: מספיק להניח $\nabla F|_{p^0} \neq 0$). לפי משפט הפונקציות הסתומות, קיימת סביבה D של p^0 שבה המשוואה $F(x,y,z) = 0$ שקולה למשוואה $z = \varphi(x,y)$.

$$\varphi_x|_{p^0} = -\frac{F_x(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}, \varphi_y|_{p^0} = -\frac{F_y(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}$$

לפי המקרה הקודם, המישור המשיק לM בנק' p^0 נתון ע"י

$$-\varphi_x\left(p^0\right)(x - x_0) - \varphi_y\left(p^0\right)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$\frac{F_x(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}(x - x_0) + \frac{F_y(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}{F_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))}(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$\boxed{F_x(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0))(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) = 0}$$

דוגמה

הנק' $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ נמצאת על המשטח הכדורי $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. המישור המשיק למשטח הנ"ל בנק' הנ"ל הוא בעל המשוואה

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0\end{gathered}}$$

אינטגרציה לפי רימן (ב$\mathbb{R}^k$)

להלן נגדיר, ננסח ונוכיח את הדרוש ב$\mathbb{R}^2$ או$\mathbb{R}^3$, לפשטות הסימנים. לכן נסמן את המשתנים בx, y, z (במקום x_1, x_2, x_3)

אינטגרציה מעל "תחום סגור" $\bar{D} = D \cup \partial D$ וחסום "בעל שטח"

יהי $r > 0$. הישרים $[(j-1)r, jr] \times [(k-1)r, kr]$, $j \cdot k \in \mathbb{Z}$ נקראים סריג

A_r: קבוצת כל ריבועי הסריג הסגורים (עם קבוע סריג r) המוכלים בD.

C_r קבוצת כל ריבועי הסריג הסגורים (עם קבוע סריג r) הפוגשים את D.

$B_r = A_r \cup C_r$ - כל ריבוע כנ"ל בעל שטח r

כיוון ש$\bar{D}$ חסום, מספר הריבועים בכל מחלקה A_rוC_r הוא סופי.

$S(A_r)$ =השטח של איחוד הריבועים בA_r (או C_r, B_r) מוגדר היטב בr^2 כפול מספר הריבועים בקבוצה המתאימה.

$$A_r \subset B_r$$

$$S(A_R) \leq S(B_r)$$

הגדרה

נאמר ש$\bar{D}$ הוא בעל שטח אם $\exists \lim_{r \to 0} S(B_r) = \exists \lim_{r \to 0} S(A_r)$

$$S(C_r) = S(B_r) - S(A_r)$$

תנאי הכרחי לכך ש$\bar{D}$ הוא בעל שטח הוא $\lim_{r \to 0} S(C_r) = 0$. זה גם תנאי מספיק. (הוכחה מושמטת)

הגדרה

- תחום מטיפוס x כך שכל ערכי הx הם בין a, b
- תחום מטיפוס y כך שכל ערכי הy הם בין c, d

יהי $\bar{D}$ תחום סגור בעל שטח ב$\mathbb{R}^2$. תהי $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ חסומה. "חלוקה" של $\bar{D}$ היא אוסף סופי של תחומים חלקיים מאותו טיפוס $\bar{D}_j$

$$T = \{\bar{D}_j | j = 1, ...n\}$$

כך ש

$$j \neq k \begin{cases} D_j \cap D_k = \emptyset \\ \bar{D} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{D}_i \end{cases}$$

נבחר $p_j \in \bar{D}_j$.

$$\sigma(f,T) \doteqdot \sum_{j=1}^{n} f(p_j)\, S\left(\bar{D}_j\right)$$

"סכום רימן" עבור f והחלוקה T(תלוי גם בבחירת הנקודות p_j). זהו "סכום של נפחי תיבות"

$$z = f(x,y) \geq 0$$

הקוטר של קבוצה K ב$\mathbb{R}^k$ מוגדר $d(K) = \sup d(u,v)$, $u,v \in K$. נסמן $\lambda(T) \doteqdot \max_{K \in T} d(K)$

הגדרה

אם קיים הגבול $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f,T)$ נקרא לו האינטגרל(הכפול) של רימן של f מעל $\bar{D}$ ונסמנו

$$\iint_{\bar{D}} f\, \mathrm{d}S$$

או

$$\iint_{\bar{D}} f(x,y) \underbrace{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}_{\doteqdot \mathrm{d}S}$$

כלומר

קיים מספר J כך שלכל $\epsilon > 0$ נתון, קיים $\delta > 0$ באופן ש<u>לכל החלוקות</u> T של $\bar{D}$ עם $\lambda(T) < \delta$, $\left| \sum_{j=1}^{n} f(p_j)\, S\left(\bar{D}_j\right) - J \right| < \epsilon$ לכל בחירה של נקודות $p_j \in \bar{D}_j$ המספר J הנ"ל(אם קיים)הוא <u>יחיד</u>(מיידי) ונקרא הגבול$(*)$

אינטגרל לפי סכומי דרבו

$$M_j = \sup_{\bar{D}_j} f$$

$$m_j = \inf_{\bar{D}_j} f$$

סכום עליון: $\overline{\sigma}\left(f,T\right) \doteqdot \sum_{j=1}^{n} M_j S\left(\bar{D}_j\right)$

סכום תחתון: $\underline{\sigma}\left(f,T\right) \doteqdot \sum_{j=1}^{n} m_j S\left(\bar{D}_j\right)$

$$mS\left(\bar{D}\right) \leq \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \overline{\sigma} \leq MS\left(\bar{D}\right)$$

אינטגרל עליון: $\overline{\iint} f \, \mathrm{d}S = \inf \overline{\sigma}$

אינטגרל תחתון: $\underline{\iint} f \, \mathrm{d}S = \sup \underline{\sigma}$

אם $\overline{\iint} = \underline{\iint}$, נאמר ש$f$ אינטגרבילים רימן על $\bar{D}$, והערך המשותף נקרא האינטגרל הכפול של f מעל $\bar{D}$, $\iint\limits_{D} f \, \mathrm{d}S$