# פתרון תרגיל בית 9 מבוא לחוגים ומודולים
# 88-212 סמסטר ב' תשפ"א

**שאלה 1.** יהי $F$ שדה. לכל אחד מהחוגים הבאים, קבעו האם הוא שדה, תחום אוקלידי, תחום ראשי, תחום פריקות יחידה וחוג נותרי:

א. $F[x]$.

ב. $F[x,y]$.

ג. $F[x,y,z]$.

ד. $F[x_1,x_2,\dots]$ (פולינומים ב-$\aleph_0$ משתנים).

פתרון.

א. לפי מה שהוכחנו בתרגול, $F[x]$ הוא תחום אוקלידי שאינו שדה. בפרט הוא גם חוג נותרי.

ב. $F[x]$ אינו שדה, ולכן לפי הטענה מהתרגול $F[x,y]=F[x][y]$ אינו תחום ראשי. הוא כן תחום פריקות יחידה, כי חוג פולינומים מעל תחום פריקות יחידה הוא תחום פריקות יחידה, והוא גם נותרי, לפי משפט הבסיס של הילברט פעמיים ($F$ נותרי, לכן $F[x]$ נותרי, לכן $F[x,y]$ נותרי).

ג. בדומה לסעיף הקודם, $F[x,y,z]$ הוא תחום פריקות יחידה נותרי שאינו תחום ראשי.

ד. $F[x_1,x_2,\dots]$ הוא תחום פריקות יחידה שאינו נותרי. הוא לא נותרי כי יש בו את השרשרת

$$\langle x_1\rangle \subseteq \langle x_1,x_2\rangle \subseteq \langle x_1,x_2,x_3\rangle \subseteq \cdots$$

שלא מתייצבת לעולם. הוא כן תחום פריקות יחידה, כי בכל איבר שלו יש רק מספר סופי של משתנים; אז בעצם אפשר לחשוב עליו כעל פולינום באיזשהו $F[x_1,\dots,x_n]$, ובחוג הזה יש פריקות יחידה.

**שאלה 2.** יהי $R$ חוג חילופי, ויהי $R_0\subseteq R$ תת-חוג של $R$. נניח ש-$R$ נוצר סופית מעל $R_0$, וש-$R_0$ הוא נותרי. הוכיחו כי $R$ נותרי בעצמו. (רמז: ראינו בעבר שאם $R$ נוצר סופית מעל $R_0$, אז $R$ הוא מנה של חוג פולינומים $R_0[x_1,\dots,x_n]$ לאיזשהו $n\in\mathbb{N}$)

הוכחה. ראינו בתרגול שאם חוג חילופי $R$ נוצר על ידי $n$ איברים מעל $R_0$, אז $R$ הוא מנה

$$R\cong {}^{R_0[x_1,\dots,x_n]}/_{I}$$

לאיזשהו אידאל $I\lhd R_0[x_1,\dots,x_n]$. מההנחה, $R_0$ נותרי; לכן ממשפט הבסיס של הילברט $R_0[x_1]$ נותרי, לכן גם $R_0[x_1,x_2]=R_0[x_1][x_2]$ נותרי, ובאינדוקציה $R_0[x_1,\dots,x_n]$ נותרי. אבל גם מנה של חוג נותרי היא נותרית, לכן $R$ נותרי בעצמו. $\square$

**שאלה 3** (וידוא הגדרות)**.** יהי $R$ חוג ותהי $(M,+)$ חבורה אבלית. נניח שנתונה פעולה בינארית $\psi\colon R\times M\to M$ שנסמן אותה $\psi(r,m)=rm$ לאיברים $r\in R$, $m\in M$. נגדיר על החבורה האבלית $R\oplus M$ פעולת כפל לפי

$$(r+m)(r'+m')=rr'+rm'$$

הוכיחו שפעולת כפל זו הופכת את $R\oplus M$ לחוג בלי יחידה אם ורק אם $\psi$ הופכת את $M$ למודול מעל $R$.

פתרון. הייתה חסרה בתרגיל הנחה: ש-$\psi\left(1,m\right)=m$ לכל $m\in M$ (אחרת, אפשר לקחת $\psi=0$; $R\oplus M$ יהיה חוג בלי יחידה, אבל $\psi$ לא הופכת את $M$ למודול מעל $R$).

נניח שפעולת הכפל הזו הופכת את $R\oplus M$ לחוג בלי יחידה. נוכיח ש-$\psi$ הופכת את $M$ למודול מעל $R$:

- יהיו $m_1,m_2\in M$ ו-$r\in R$. מהפילוג ב-$R\oplus M$,

$$r\left(m_1+m_2\right)=rm_1+rm_2.$$

- יהיו $m\in M$ ו-$r_1,r_2\in R$. מהפילוג ב-$R\oplus M$,

$$\left(r_1+r_2\right)m=r_1m+r_2m\ .$$

- יהיו $r_1,r_2\in R$ ו-$m\in M$. מכך ש-$R\oplus M$ אסוציאטיבי,

$$\left(r_1r_2\right)m=r_1\left(r_2m\right)\ .$$

- יהי $m\in M$. אז $1_Rm=m$ מההנחה שצריך להוסיף.

זה מראה ש-$\psi$ הופכת את $M$ למודול מעל $R$.

לכיוון השני, נניח ש-$\psi$ הופכת את $M$ למודול מעל $R$. אנחנו יודעים ש-$R\oplus M$ היא חבורה אבלית. צריך לוודא שהכפל מגדיר מבנה של חוג.

- הסגירות ברורה.
- לגבי אסוציאטיביות,

$$\left(\left(r+m\right)\left(r'+m'\right)\right)\left(r''+m''\right)=\left(rr'+rm'\right)\left(r''+m''\right)=\left(rr'\right)r''+\left(rr'\right)m''$$
$$\left(r+m\right)\left(\left(r'+m'\right)\left(r''+m''\right)\right)=\left(r+m\right)\left(r'r''+r'm''\right)=r\left(r'r''\right)+r\left(r'm''\right)$$

ונקבל שוויון בגלל תכונות המודול.

- פילוג: נראה מצד אחד, ההוכחה לכיוון השני דומה.

$$\begin{aligned}\left(r+m\right)\left(\left(r'+m'\right)+\left(r''+m''\right)\right)&=\left(r+m\right)\left(\left(r'+r''\right)+\left(m'+m''\right)\right)=\\&=r\left(r'+r''\right)+r\left(m'+m''\right)=\\&=rr'+rr''+rm'+rm''=\\&=\left(r+m\right)\left(r'+m'\right)+\left(r+m\right)\left(r''+m''\right)\end{aligned}$$

**שאלה 4** (חימום)**.** יהי $R$ חוג. הוכיחו שהקבוצות הבאות הן תת־מודולים של $R^n$ (שהוא מודול מעל $R$):

א. $\{(a,\dots,a)\in R^n\mid a\in R\}$.

ב. $\{(a_1,\dots,a_n)\in R^n \mid a_1+\cdots+a_n=0\}$.

ג. $I_1\times\cdots\times I_n$ כאשר $I_i$ הם אידאלים של $R$.

פתרון.

א. נוודא שהיא סגורה תחת צירופים לינאריים:

$$\alpha\left(a,\dots,a\right)+\beta\left(b,\dots,b\right)=\left(\alpha a+\beta b,\dots,\alpha a+\beta b\right)\in\left\{(a,\dots,a)\mid a\in R\right\}.$$

ב. גם פה: נסמן את תת-המודול $M_2$. אם $\left(a_1,\dots,a_n\right),\left(b_1,\dots,b_n\right)\in M_2$, אז לכל $\alpha,\beta\in R$ מתקיים

$$\left(\alpha a_1+\beta b_1\right)+\cdots+\left(\alpha a_n+\beta b_n\right)=\alpha\left(a_1+\cdots+a_n\right)+\beta\left(b_1+\cdots+b_n\right)=0$$

ולכן $\alpha\left(a_1,\dots,a_n\right)+\beta\left(b_1,\dots,b_n\right)\in M_2$.

ג. נסמן את תת-המודול $M_3$. אם $\left(a_1,\dots,a_n\right),\left(b_1,\dots,b_n\right)\in M_3$, אז $a_j,b_j\in I_j$ לכל $1\leq j\leq n$. יהיו $\alpha,\beta\in R$. מהבליעה של האידאלים, מתקיים $\alpha a_j,\beta b_j\in I_j$. לכן גם $\alpha a_j+\beta b_j\in I_j$ לכל $1\leq j\leq n$, מה שמראה ש-$\alpha\left(a_1,\dots,a_n\right)+\beta\left(b_1,\dots,b_n\right)\in M_3$.

**שאלה 5.** תזכורת: אם $V$ מרחב וקטורי מעל שדה $F$ וישנה העתקה לינארית $T\colon V\to V$, אז ל-$V$ יש מבנה של מודול מעל $F[x]$ על ידי הגדרת הכפל $f(x)\cdot v=f(T)(v)$.
יהי $M=\left(\mathbb{R}^2,T\right)$ מודול מעל $\mathbb{R}[x]$ כאשר $T$ היא ההטלה על ציר ה-$y$, כמו בתזכורת. הוכיחו כי תת־המודולים היחידים של $M$ הם $\mathbb{R}^2$, ציר ה-$x$, ציר ה-$y$ ו-$\{(0,0)\}$.

פתרון. תת־המודולים של $M$ הם בדיוק תת־המרחבים ה-$T$-אינווריאנטיים. קל לראות שהקבוצות הרשומות הן אכן תת־מרחבים $T$-אינווריאנטיים.
כדי להראות שאלו כולם נניח $W$ הוא תת־מרחב $T$-אינווריאנטי. אם $W\neq 0$, ואינו ציר ה-$x$, אז ישנה נקודה $(x,y)\in W$ כך ש-$y\neq 0$. על ידי כפל בסקלר $y^{-1}$ נסיק כי $\left(xy^{-1},1\right)\in W$. מפני ש-$W$ הוא $T$-אינווריאנטי, אז $TR(xy^{-1},1)=(0,1)\in W$. לכן כל ציר ה-$y$ מוכל ב-$W$. אם $W$ אינו ציר ה-$y$, אז יש בו נקודה נוספת $(x',y')\in W$ כך ש-$x'\neq 0$. על ידי חיסור $(0,y')\in W$ וכפל בסקלר מתאים נקבל ש-$(1,0)\in W$. קיבלנו שני איברי בסיס של $\mathbb{R}^2$, ולכן $W=\mathbb{R}^2$.

**שאלה 6.** הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ אינו חופשי כמודול מעל $\mathbb{Z}$.

פתרון. כל שני שברים הם תלויים כי עבור $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ מתקיים

$$bc\frac{a}{b}-ad\frac{c}{d}=0$$

ולכן אם $\mathbb{Q}$ היה חופשי, הוא היה חייב להיות מדרגה 1, כלומר ציקלי ואז $\mathbb{Q}\cong\mathbb{Z}$ כחבורות אבליות, מה שכמובן איננו נכון (למה?).
העשרה: אם $R$ תחום שלמות שאינו שדה ו-$F$ הוא שדה השברים שלו, אז $F$ אינו חופשי כמודול מעל $R$ מטיעון דומה (אם $F$ היה חופשי מדרגה 1, אז $F\cong R$ (מדוע?), בסתירה; לכן חייבים להיות לפחות שני שברים בבסיס, אבל כל שני שברים תלויים לינארית).

**שאלה 7.** יהי $F$ שדה. ניזכר ש-$F^n$ הוא מודול מעל $M_n\left(F\right)$. הוכיחו שזהו מודול פשוט.

הוכחה. יהי $0\neq v\in F^n$. צריך להראות $F^n=M_n\left(F\right)v$. כיוון ש-$v\neq 0$, יש מטריצות $A_1,\dots,A_n\in M_n\left(F\right)$ שעבורן $A_iv=e_i$ (אפילו אפשר לבחור את $A_i$ להיות הפיכות; זה נכון כי אפשר להשלים את $v$ לבסיס של $F^n$, ואז להגדיר העתקות לינאריות מתאימות לפי משפט ההגדרה של העתקות לינאריות). לכן $e_1,\dots,e_n\in M_n\left(F\right)v$, ומכאן $F^n\subseteq M_n\left(F\right)v$, כלומר יש שוויון. $\square$

**שאלה 8.** יהי $R$ חוג. ניזכר ש-$R$ הוא מודול מעל עצמו.

א. הראו ש-$R$ הוא מודול ציקלי מעל עצמו.

ב. הוכיחו: $R$ מודול פשוט מעל עצמו אם ורק אם $R$ הוא חוג עם חילוק.

ג. נניח ש-$R$ חילופי, ויהי $I \lhd R$ אידאל של $R$ (לכן הוא גם תת־מודול של $R$ כמודול מעל עצמו). הראו ש-$I$ נוצר על ידי $d$ איברים כאידאל (כלומר $I = \langle a_1, \ldots, a_d \rangle$) אם ורק אם $I$ נוצר על ידי $d$ איברים כתת־מודול של $R$.

ד. תנו דוגמה למודול ציקלי $M$ מעל חוג $R$ ולתת־מודול $N \leq M$ כך ש-$N$ אינו ציקלי. (רמז: $M = R$ עבור $R$ לא תחום ראשי)

פתרון.

א. $R$ ציקלי מעל עצמו כי הוא נוצר על ידי האיבר $1$.

ב. אנחנו יודעים שתת-המודולים הם בדיוק האידאלים השמאליים של $R$. לכן $R$ פשוט מעל עצמו אם ורק אם אין לו אידאלים שמאליים לא טריוויאליים אם ורק אם הוא חוג עם חילוק (שאלה מהבוחן הראשון).

ג. נשים לב שההגדרות פשוט מתלכדות. $I$ נוצר על ידי $a_1, \ldots, a_d$ כאידאל אם

$$I = \langle a_1, \ldots, a_d \rangle = Ra_1 + \cdots + Ra_d$$

(כאן אנחנו משתמשים בחילופיות של $R$). $I$ נוצר על ידי $a_1, \ldots, a_d$ כמודול אם הם פורשים אותו, כלומר

$$I = Ra_1 + \cdots + Ra_d.$$

ד. ניקח $R = F[x, y]$ ו-$I = \langle x, y \rangle$. $R$ הוא ציקלי מעל עצמו, אבל $I$ הוא לא תת-מודול ציקלי של $R$ כי הוא לא אידאל ראשי.

**שאלה 9** (העשרה)**.** נסו להבין כמה שיותר מהדוגמאות בערך מודולים של הומומורפיזם בויקיפדיה, במיוחד לגבי חוגי אנדומורפיזמים.

בהצלחה!