תרגול 8

11 במאי 2021

1 חבורת מנה

ראיתם בהרצאה שבהינתן חבורה G, ותת־חבורה נורמלית $H \trianglelefteq G$, אז ניתן להגדיר פעולה על המחלקות הימניות ע"י:

$$(gH)(g'H) = gg'H$$

קבוצת המחלקות הימניות עם פעולה זו היא חבורה.

תרגילים:

1. הוכיחו או הפרכיו:

(א) אם G חבורה סופית אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall g \in G : g^n = e$.

(ב) אם G חבורה בה הסדר של כל איבר הוא סופי (כלומר, $\forall g \in G : o(g) < \infty$), אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall g \in G : g^n = e$.

פתרון:

א. הוכחה: לפי מסקנות ממשפט לגראנז' מתקיים שעבור $n = |G|$ אז $\forall g \in G : g^n = e$.

ב. הפרכה: נראה כעת דוגמא לחבורת מנה המפריכה. בהמשך נראה שהיא איזומורפית לתת־חבורה של מעגל היחידה. נתבונן בחבורה החיבורית $\mathbb{Q}$. כיון שהיא אבלית, אז כל תת־חבורה היא נורמלית. בפרט, $\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Q}$. ההפרכה היא $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. איך נראים איברים בחבורת המנה הזו?

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{a + \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Q}\} = \{\dots a+(-2), a+(-1), a+0, a+1, a+2, \dots\}$$

אילן נציגים נחמדים אנחנו יכולים לקחת לחבורת המנה? למשל נשים לב:

$$1.4, 2.4, -2.6, -3.6 \in \frac{2}{5} + \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z} = e_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$$

נראה זאת:

$$(a+\mathbb{Z})+(0+\mathbb{Z})=(a+0)+\mathbb{Z}=a+\mathbb{Z}$$

באופן כללי, נוכל לקחת כנציגים את $\mathbb{Q}\cap[0,1)=\{a\in\mathbb{Q}:0\leq a<1\}$.
נראה שזו הפרכה: ראשית, הסדר של כל איבר הוא סופי: מה שצריך להראות, זה שבהינתן $a+\mathbb{Z}\in{}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ קיים n כך ש־ $n\left(a+\mathbb{Z}\right)=na+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. מה שבעצם צריך לדאוג זה שיתקיים $na\in\mathbb{Z}$. לשם כך נציג את $a=\frac{m}{k},m\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}$, ואז נוכל לקחת $n=k$ ונקבל:

$$n\left(a+\mathbb{Z}\right)=na+\mathbb{Z}=k\cdot\frac{m}{k}+\mathbb{Z}=m+\mathbb{Z}\underset{m\in\mathbb{Z}}{=}\mathbb{Z}$$

נראה שאין טבעי ששולח את כולם ליחידה: לכל $n\in\mathbb{N}$ נמצא $a+\mathbb{Z}$ כך ש־ $n\left(a+\mathbb{Z}\right)\neq\mathbb{Z}$: ניקח $a=\frac{1}{n+1}$ ואז אכן:

$$n\left(a+\mathbb{Z}\right)=\frac{n}{n+1}+\mathbb{Z}\neq\mathbb{Z}$$

מה שבעצם הראנו:

$$\forall n\exists g:g^{n}\neq e$$

2 משפט האיזו הראשון

אם $\varphi:G_1\to G_2$ הומ' של חבורות אז:

$${}^{G_1}/_{\ker\varphi}\cong Im(\varphi)\leq G_2$$

תרגילים:

1. מצאו תת־חבורה של $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}=\left\{e^{i\theta}:-\pi\leq\theta<\pi\right\}$ כך ש־ $H\leq$ ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}\cong H$.

   פתרון: נרצה להגדיר הומ' $\varphi:\mathbb{Q}\to\Omega$ עבורו $\ker\varphi=\mathbb{Z}$. נגדיר:

   $$\varphi(a)=e^{2\pi ia}\in\Omega$$

   זהו הומ':

   $$\varphi(a+b)=e^{2\pi i(a+b)}=e^{2\pi ia}e^{2\pi ib}=\varphi(a)\varphi(b)$$

מהו הגרעין:

$$\ker\varphi = \{a : e^{2\pi i a} = 1\} = \mathbb{Z}$$

בסה"כ לפי המשפט:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong Im(\varphi) = \{z \in \mathbb{C} | \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1\} \leq \Omega$$

2. הוכיחו:

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$$

כאשר $\mathbb{R}^\times$ זו החבורה הכ[לית של הממשיים השונים מאפס.
הוכחה: נגדיר הומ' $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ ע"י:

$$\varphi(A) = \det A$$

זהו הומ':

$$\varphi(AB) = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \varphi(A)\varphi(B)$$

הגרעין:

$$\ker\varphi = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\} = SL_n(\mathbb{R})$$

נותר להראות שזהו הומ' על: יהי $x \in \mathbb{R}^\times$ נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} x & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ואז

$$\det A = x$$

בסה"כ, לפי משפט האיזו הראשון:

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$$