תרגיל 8 - בוגרים

תרגיל 1. מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן (מקסימום/מינימום/אוכף) עבור הפונקציות הבאות (בכל תחום ההגדרה).

1. $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-6y^2$

פתרון. נמצא את ∇f ואת הנקודות בו הוא מתאפס.

$$\nabla f\left(x,y\right)=\left(3x^2-6x,3y^2-12y\right)=\left(0,0\right)$$
$$\Downarrow$$
$$x=0,2\,y=0,4$$

הנקודות הקריטיות הן $\left(2,4\right),\left(2,0\right),\left(0,4\right),\left(0,0\right)$. נמצא את ההסיאו

$$H_f\left(x,y\right)=\left(\begin{array}{cc}6x-6 & 0\\ 0 & 6y-12\end{array}\right)$$

המטריצה היא תמיד אלכסונית, וכאשר $\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$ הערכים העצמיים שלה הם -6 ו -12 כלמר שליליים ולכן יש נקודת מקסימום, כאשר, $\left(x,y\right)=\left(0,4\right)$ הערכים העצמיים הם $\left(-6,12\right)$ ולכן יש אוכף (לא מינימום ולא מקסימום), עבור $\left(2,0\right)$ הערכים העצמיים הם $\left(6,-12\right)$ ולכן שוב שי אוכף, ועבור $\left(2,4\right)$ הערכים העצמיים הם $\left(6,12\right)$ ולכן יש מימימום.

2. $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$

פתרון. שוב, נשווה את הגרדיאנט ל 0.

$$\nabla f\left(x,y\right)=\left(2x-2,-4y\right)=\left(0,0\right)$$
$$\Downarrow$$
$$.\left(x,y\right)=\left(0,1\right)$$

נמצא את הסיאן:

$$H_f\left(\begin{array}{cc}2 & 0\\ 0 & -4\end{array}\right)$$

יש ערכים עצמיים עם סימן שונה ולכן זאת נקודת אוכף.

3. $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

פתרון. כמו בפעמים הקודמות.

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} 4x^3-4x+4y & 4y^3+4x-4y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
4x^3-4x+4y &= 0 \\
4y^3-4y+4x &= 0 \\
&\Downarrow \\
y &= x-x^3 \\
x &= y-y^3 \\
y-x &= -x^3 \\
x-y &= -y^3
\end{aligned}$$

ולכן $y=-x$. נציב ונקבל:

$$-x=x-x^3 \Rightarrow 2x-x^3=0 \Rightarrow x=0,\pm\sqrt{2}$$

$$(x,y)=(0,0),\left(-\sqrt{2},2\right),\left(\sqrt{2},-2\right).$$

נחשת את הסיאן

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}.$$

נבדוק התנהגות בנקודות.

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

נשים לב, שיש ע"ע 0 יחד ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. לכן, אי אפשר להסיק מהסיאן אם יש מינימום או מקסימום. נראה ש 0 היא נקודת אוכף. אם מתקרבים לאורך הישר $(x,0)$ נקבל $f(x,0)=x^4-x^2<0=f(0,0)$ לכל $x<1$. מצד שני אם מתקרבים לארוך השיר $x=y$, $f(x,x)=2x^4>0=f(0,0)$ ולכן f לא מינימום וגם לא מקסימום.
עבור $(x,y)=\pm\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ נקבל ש

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

המינורים הראשיים הם $|a_{11}|=|20|>0$ ו $\det H_f=800-16>0$ כולם חיוביים ולכן יש לנוק נקודת מינימום.

4. $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, $(a,b>0)$

פתרון. תשע"ט תרגיל 7 שאלה 1ד.

5. $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ תשע"ט תרגיל 7 שאלה 1ה

6. $f(x,y)=x^2y$.

פתרון. נשווה את ∇f ל 0.

$$\nabla f\left(x,y\right)=\left(2xy,x^2\right)=0$$
$$\Downarrow$$
$$x=0$$

נשים לב, שהסיאן לא מוסיף מידע, כיוון שהיא מטריצה אלכסונית עם 0 באלכסון. נבדוק ידנית את התנהגות על ציר ה x.

$$f\left(x,y+k\right)-f\left(0,y\right)=$$
$$x^2\left(y+k\right)-0=x^2\left(y+k\right)$$

עכשיו, נשים לב שאם $y>0$ אם $|k|<y$ אזי הביטוי חיובי, ולכן ב $B\left(\left(0,y\right),y\right)$ הפונקציה חיובית וגדולה או שווה מ 0 שהוא ערך של $f(0,y)$. לכן, עבור $y>0$, (x,y) היא נקודת מינימום. באותו אופן, אם $y<0$ יש נקודת מקסימום. אם $y=0$ הסימן של $x^2\left(y+k\right)$ תלוי ב k ולכן $(0,0)$ היא לא נקודת מינימום ולא נקודת מקסימום.

תרגיל 2. (ממחבן) מצאו מקסימום ומינימום מוחלטים של הפונקציה $f\left(x,y\right)=xy$ בתחום האליפסה $2x^2+\frac{1}{2}y^2\leq 1$. (הדרכה: מצאו תחילה מינינום ומקסימום מקומיים בפנים של האליפסה באופן רגיל, ואחר כך מינימום ומקסימום על השפה בעזרת כופלי להגרנז'. שימו לב, השפה של האליפסה היא קומפקטית.)

פתרון. מינימום ומקסימום קיימים מפני שהאליפסה קומפקטית. נמצא את הנקודות הקריטיות. הערך המקסימלי יתן מקסימום מוחלט והערך המינימלי יתן מינימום מוחלט. על מנת למצוא נקודות קריטיות של f בתוך האליפסה, נשווה את ∇f ל 0.

$$\nabla f\left(x,y\right)=\left(y,x\right)=\left(0,0\right)$$

ולכן $(0,0)$ היא נקודה קריטית. על מנת למצוא נקודות קריטיות על השפה אילוץ, נשתמש

בכופלי לגרנז. (ניתן להשתמש כי ∇g אינה מתאפסת על השפה). נגדיר

$$.g(x,y,\lambda)=xy-\lambda\left(2x^2+\frac{1}{2}y^2-1\right)$$

$$\nabla g(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix} y-4\lambda x & x-\lambda y & 2x^2+\frac{1}{2}y^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x=\lambda y$$

$$y-4\lambda^2 y=0$$

$$y=0\Rightarrow x=0\Rightarrow 2x^2+\frac{1}{2}y^2\neq 0\Rightarrow x,y\neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$y\left(1-4\lambda^2\right)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda=\pm\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2=\frac{y^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$2x^2+\frac{y^2}{2}=y^2=1$$

$$y=\pm 1, x=\pm\frac{1}{2}$$

נציב את הנקודות הקריטיות שמצאנו ב f.

$$f\left(\frac{1}{2},1\right)=f\left(-\frac{1}{2},-1\right)=\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2},1\right)=f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{1}{2}$$

$$f(0,0)=0$$

לכן יש מינימום מוחלט $-\frac{1}{2}$ ב $\left(-\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{2},-1\right)$ ומקסימום מוחלט ב $\pm\left(\frac{1}{2},1\right)$.

תרגיל 3. (ממבחן) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות פעמיים ונגדיר

$$.g(x,y)=f(x)+\frac{1}{2}y^2$$

1. הראו שכל נקודה קריטית של g ב $\mathbb{R}^2$ היא מהצורה $(x_0,0)$ כאשר x_0 היא נקודה קריטית של f.
2. מיינו את הנקודות הקריטיות של g ב $\mathbb{R}^2$ בשני המקרים הבאים:

(א) כאשר x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של f.

(ב) כאשר x_0 היא נקודת מינימום מקומי של f.

פתרון. נשווה את ∇g ל 0 ונקבל:

$$\nabla g\left(x,y\right)=\left(f'\left(x\right),y\right)=\left(0,0\right).$$

והביטוי מתאפס כאשר $f'\left(x\right)=0$ זאת אומרת x נקודה קריטית של f כמו שרצינו.

נסווג את הנקודות הקריטיות של g בעזרת נקודות קיצון של f.

אם x_0 היא נקודת מקסימום של f שלא נקודת מינימום (זאת אומרת, f אינה קבועה בסביבה x_0) יש לנו נקודת אוכף, מפני קיימים אינסוף ε קטנים כרצוננו כך ש

$$g\left(x_0+\varepsilon,0\right)<f\left(x_0,0\right)$$

אבל $g\left(x_0,\varepsilon\right)>g\left(x_0,0\right)$ ולכן יש כל סביבה $\left(x_0,0\right)$ נקודה שהערך שלה גדול מ $g\left(x_0,0\right)$ וגם נקודה שהערך שלה קטן מ $g\left(x_0,0\right)$.

אם x_0 מינימום מקומי, אזי עבור ε מספיק קטן ולכל y מתקיים:

$$g\left(x_0+\varepsilon,y\right)=f\left(x_0+\varepsilon\right)+\frac{1}{2}y^2\geq f\left(x_0\right)+0=g(x_0,0)$$

לכן קיימת סביבה של $\left(x_0,0\right)$ שבה $g\left(x,0\right)>g\left(x_0,0\right)$, זאת אומרת, $\left(x_0,0\right)$ היא נקודת מינימום מקומית של g.