תרגול 11 – אינפי' 1

הגדרה – רציפות בנקודה

נאמר שפונקציה f רציפה בנקודה x_0 אם מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

תרגיל

מצאו $a,b\in\mathbb{R}$ כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-2\sin x & x\le-\frac{\pi}{2}\\ a\sin x+b & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}\\ \cos x & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

פתרון

לכל $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$ הפונקציה רציפה (כסכום של פונקציות אלמנטאריות רציפות). נותר לבחון מה קורה בנקודות $x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}$.

1. $x=-\frac{\pi}{2}$: מתקיים $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f\left(x\right)=-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f\left(x\right)=a\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+b=-a+b$. על מנת שהגבול יהיה קיים חייב להתקיים $-a+b=2$. שימו לב שעל מנת שהפונקציה תהיה רציפה, חייב להתקיים $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, אך זה נובע מהתנאי $-a+b=2$.

2. $x=\frac{\pi}{2}$: מתקיים $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f\left(x\right)=a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+b=a+b$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f\left(x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. לכן התנאי לקיום גבול הוא $a+b=0$.

בסה"כ נקבל $a+b=0\ \wedge\ -a+b=2$ ומכאן $a=1, b=-1$.

מש"ל

תזכורות

א. $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

ב. $f(x)^{g(x)}:=e^{g(x)\ln f(x)}$

ג. $\lim_{x\to p}h(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to p}\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)^{h(x)}=e^a$.

הוכחה של ג:

$$\lim_{x\to p}\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)^{h(x)}=\lim_{x\to p}e^{h(x)\ln\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)}=e^{\lim_{x\to p}h(x)\ln\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)}=e^{\lim_{x\to p}a\frac{\ln\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)}{\frac{a}{h(x)}}}$$

כעת $\lim_{x\to p}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)}{\frac{a}{h(x)}}=1$ עפ"י סעיף א' (פשוט הציבו $t=\frac{a}{h(x)}$ והיעזרו בנתון $\lim_{x\to p}h(x)=\infty$) ומכאן $\lim_{x\to p}a\frac{\ln\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)}{\frac{a}{h(x)}}=a$. בסה"כ נקבל ש-

$$\lim_{x\to p}\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)^{h(x)}=e^{\lim_{x\to p}a\frac{\ln\left(1+\frac{a}{h(x)}\right)}{\frac{a}{h(x)}}}=e^a.$$

מש"ל

תרגיל

חשבו $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$.

פתרון

$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1-3x)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-3\ln(1-3x)}{-3x}}=e^{-3}$ (להזכיר שהמעבר הלפני אחרון הוא בגלל רציפות).

מש"ל

מיון נקודות אי רציפות

<u>הגדרות</u>

1. נאמר שנקודת אי רציפות היא ממין ראשון, אם הגבולות החד צדדיים קיימים וסופיים.
2. נקודת אי רציפות היא ממין שני, אם היא לא ממין ראשון.
3. נקודת אי רציפות סליקה היא נקודת אי רציפות ממין ראשון, כאשר הגבולות החד צדדיים שווים.

<u>תרגיל</u>

מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציה $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

<u>פתרון</u>

נקודות אי הרציפות הן $0,1,-1$, ובכל נקודה אחרת הפונקציה רציפה. מקבלים (לאחר פישוט) $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}$. לכן נתחיל עם $x=0$. מתקיים $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)}{(x+1)}=-1$. ולכן $x=0$ היא נקודת אי רציפות סליקה.

עבור $x=1$ מתקיים $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)}{(x+1)}=0$, ולכן גם $x=1$ היא נקודת אי רציפות סליקה. כעת נבחון את $x=-1$: את הגבול $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)}{(x+1)}$ נפרק לשני גבולות חד צדדיים. מחד $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x-1)}{(x+1)}="\dfrac{-2}{0^-}"=\infty$, ומאידך $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x-1)}{(x+1)}="\dfrac{-2}{0^+}"=-\infty$, ולכן $x=-1$ היא נקודת אי רציפות ממין שני (שימו לב שעל מנת לקבוע שהנקודה היא ממין שני, מספיק היה להראות שהגבול מימין (או משמאל) הוא אינסופי (או לא קיים)).

מש"ל

<u>תרגיל</u>

מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציה $f(x)=[x]\cdot\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

פתרון

תוכיחו בשיעורי הבית שעבור $a\notin\mathbb{Z}$ הפונקציה $[x]$ רציפה ב-a. הפונקציה $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ רציפה בכל נקודה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות, ולכן $f(x)$ רציפה בכל $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ כמכפלה של פונקציות רציפות. כעת נבחן מה קורה בנקודות $a\in\mathbb{Z}$. כמו כן תוכיחו בשיעורי הבית ש- $\lim\limits_{x\to a^-}[x]=a-1$, $\lim\limits_{x\to a^+}[x]=a$.

לכן: $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=(a-1)\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=a\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)=f(a)$. שימו לב ששני הגבולות קיימים וסופיים. הגבולות החד צדדיים שווים אמ"מ $\sin\left(\frac{\pi a}{2}\right)=0$, כלומר $\frac{\pi a}{2}=\pi k$ או $a=2k$. לכן בנקודות מהצורה $a=2k, k\in\mathbb{Z}$ הפונקציה רציפה. כמו כן, בנקודות מהצורה $a=2k+1, k\in\mathbb{Z}$ לפונקציה יש נקודות אי רציפות ממין ראשון.

מש"ל

גבול לפי היינה

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ אמ"מ f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 ולכל $x_0\neq x_n\to x_0$ מתקיים $f(x_n)\to L$.

תרגיל

הוכיחו/הפריכו: אם $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L\in\mathbb{R}$ אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2x)-f(x)\right)=0$.

פתרון

הוכחה: נסמן $g(x)=f(2x)-f(x)$. תהי $x_n\to\infty$ ועלינו להראות ש-$g(x_n)\to 0$. מכיוון ש-$x_n\to\infty$ נקבל שגם $2x_n\to\infty$. נתון $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L\in\mathbb{R}$ ולכן על פי היינה $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(2x_n)=L$. מכאן $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(2x_n)-\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=L-L=0$.

מש"ל

משפט ערך הביניים (קושי)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי y_0 מספר ממשי הנמצא בין $f(a)$ ל-$f(b)$. אזי קיימת נקודה $x_0\in[a,b]$ כך ש-$y_0=f(x_0)$.

תרגיל (ממבחן)

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,2]$ כך ש-$f(2)=3$. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0\in[0,2]$ כך ש- $f(x_0)=\frac{1}{x_0}$.

פתרון

נתבונן בפונקציה $h(x)=xf(x)$. היא רציפה בקטע $[0,2]$ (מדוע?) ומקיימת $h(2)=6, h(0)=0$. מכיוון ש-$0<1<6$, לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $x_0\in[0,2]$ כך ש- $h(x_0)=1$ ומכאן $f(x_0)=\frac{1}{x_0}$.

מש"ל

משפט (Weierstrass)

פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת בו מינימום ומקסימום.

תרגיל (ממבחן)

נתונות שתי פונקציות f,g רציפות בקטע $[0,1]$ ומתקיים $\sup\{f(x):x\in[0,1]\}=\sup\{g(x):x\in[0,1]\}$. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ עבורה מתקיים $f(x_0)=g(x_0)$.

פתרון

מכיוון שהפונקציות רציפות בקטע הסגור $[0,1]$, הן מקבלות בו מינימום ומקסימום. אם נסמן $M=\sup\{f(x):x\in[0,1]\}=\sup\{g(x):x\in[0,1]\}$. מהנתון ניתן להסיק שקיימות נקודות $x_1,x_2\in[0,1]$ עבורן $f(x_1)=g(x_2)=M$. אם $x_1=x_2$, סיימנו. אחרת נניח בה"כ $x_1<x_2$. נגדיר את הפונקציה $h(x)=f(x)-g(x)$. מתקיים $h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=M-g(x_1)\geq 0$, $h(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-M\leq 0$. כעת, $h(x)$ רציפה בקטע $[x_1,x_2]$ כהפרש של שתי פונקציות רציפות ולכן על פי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $x_0\in[x_1,x_2]$ כך ש-$h(x_0)=0$. כלומר $f(x_0)-g(x_0)=0$ ולכן $f(x_0)=g(x_0)$.

מש"ל

תרגיל (ממבחן)

נתון ש- f פונקציה רציפה ושלילית ב-$[0,\infty)$ ומקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$.

הוכיחו/הפריכו: $\sup\{f(x):x\in[0,\infty)\}<0$.

<u>פתרון</u>

הוכחה. $\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$ ולכן לכל $\varepsilon>0$ ובפרט עבור $\varepsilon=0.5$ מתקיים: קיים $0<N\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x>N$, $|f(x)+1|<0.5$. בפרט: $-1.5<f(x)<-0.5$. מכיוון ש-$f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[0,N]$ היא מקבלת בו מקסימום שנסמנו M.

נשים לב ש-$M<0$, שכן $f(x)$ שלילית, ולכן

$\sup\{f(x):x\in[0,\infty)\}\le\max\{M,-0.5\}<0$.

מש"ל