לינארית 2 תרגול 14

30 ביוני 2021

תרגילים:

1. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה כך ש־ המטריצה A^tA סקלארית. הוכיחו שיש $b \in \mathbb{R}$ ומטריצה או"ג O כך ש־ $A = bO$.

פתרון: A^tA סקלארית, זאת אומרת שיש $a \in \mathbb{R}$ כך ש־ $A^tA = aI$. נשים לב שלכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $A^tAv = aIv = av$, ולכן a ע"ע בריבוי אלגברי וגיאומטרי n של המטריצה A^tA.

טענה: $a \geq 0$:

$$\forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^n : a \cdot \|v\|^2 = a\langle v, v\rangle = \langle av, v\rangle = \langle A^tAv, v\rangle =$$

לפי ההגדרה של מטריצה צמודה לכל מטריצה A ולכל v, u מתקיים:

$$\langle Av, u\rangle = \langle v, A^*u\rangle$$

נשים לב שאצלנו נקבל:

$$\langle A^tAv, v\rangle = \langle Av, A^{t^t}v\rangle = \langle Av, Av\rangle = \|Av\|^2$$

בסה"כ:

$$\forall 0 \neq v \in \mathbb{R}^n : a \cdot \|v\| = \|Av\|$$

ומכאן (שימו לב שאנחנו לא מחלקים באפס כי $v \neq 0$):

$$a = \frac{\|Av\|^2}{\|v\|^2} \geq 0$$

נחלק למקרים:

אם $a = 0$ אז $A^tA = 0$ מה שאומר $A = 0$ הסבר:

$$\left(A^tA\right)_{i,i} = \|R_i(A)\|$$

אז נוכל לקחת $b = 0, O = I$.
אחרת, $a > 0$, ואז ניקח $O = \frac{1}{\sqrt{a}}A$. היא או"ג:

$$O^tO = \frac{1}{\sqrt{a}}A^t \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}A = \frac{1}{a}A^tA = \frac{1}{a}aI = I$$

וכעת עבור $b = \sqrt{a}$ נקבל:

$$bO = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}A = A$$

2. נתבונן במרחב $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ ובתתי המרחבים: $U = \{A \mid A^t = A\}, W = \{A \mid A^t = -A\}$. הוכיחו: $W = U^\perp$ (עבור המ"פ הסטנדרטית על מרחב המטריצות).
פתרון: האם ראיתם שמתקיים:

$$V = U \oplus W$$

בנוסף, מתקיים:

$$V = U \oplus U^\perp$$

ולכן:

$$\dim W = n^2 - \dim U \wedge \dim U^\perp = n^2 - \dim U$$

כעת, אם נראה $W \subseteq U^\perp$, אז מהכלה ושיוויון מימדים נקבל $W = U^\perp$. נראה את ההכלה: יהי $A \in W$ אנטי־סימטרית. אזי:

$$\forall B \in U : \langle A, B\rangle = tr(AB^t) = tr(AB) = tr(BA) = tr\left(B(-A^t)\right) = -tr(BA^t) = -\langle B, A\rangle$$

כעת, בגלל שאנחנו מעל הממשיים, אז:

$$\langle B, A\rangle = \langle A, B\rangle$$

ומכאן נוכל להמשיך את רצף השיוויונות לעיל:

$$-\langle B, A\rangle = -\langle A, B\rangle$$

ובסה"כ:

$$\forall B \in U : \langle A, B\rangle = -\langle A, B\rangle$$

מה שאומר:

$$\langle A, B\rangle = 0$$

ומכאן לפי הגדרה $A \in U^\perp$. בנוסף ראינו בהתחלה $\dim W = \dim U^\perp$, אז יש לנו הכלה + שיוויון מימדים, ולכן:

$$W = U^\perp$$

3. שאלה 5 באיזשהו מבחן: הוכיחו או הפריכו:

(א) $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי v ו"ע של A לע"ע λ. יהי $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ פולינום. אזי:

$$g(A)v = g(\lambda)v$$

פתרון: $Av = \lambda v$. לצורך נוחות, קיים n טבעי וקיימים $a_k \in \mathbb{F}$ כך ש־

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

כעת נשים לב:

$$g(A)v = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right) v = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(A^k v\right) \underset{*}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k v = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right) v = g(\lambda)v$$

הסבר ל־$*$: אם $Av = \lambda v$ אז לכל k (באינדוקציה, אחרי נכונות ל־ $k-1$):

$$A^k v = A^{k-1}Av = A^{k-1}\lambda v = \lambda A^{k-1} v = \lambda\lambda^{k-1} v = \lambda^k v$$

(ב) תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש־ $|A| = 1$. אזי קיימת U אוניטרית כך ש־ U^*AU אלכסונית.

פתרון: הפרכה. ניקח

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

זה בלוק ז'ורדן $J_2(1)$ שלא לכסין, ובפרט לא אוניטרית.

4. שאלה 4 באותו מבחן. תהא

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(א) מצאו את $P_A(x)$. פ"א.

$$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x & -4 & 0 \\ 1 & x-4 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-2)\left(x(x-4)+4\right) = (x-2)(x-2)^2 = (x-2)^3$$

(ב) מצאו את $m_A(x)$ פ"מ.

פתרון: נציב את A בפ"א, ונתחיל להעלות את החזקה עד להתאפסות ראשונה:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$m_A(x) = (x-2)^2$$

(ג) מצאו את צורת ז'ורדן של A.

פתרון: הבלוק הגדול הוא מסדר 2, לפי החזקה בפ"מ. בגלל שאנחנו 3 על 3, אז חייב להיות בדיוק עוד בלוק אחד מסדר 1, וקיבלנו:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ד) האם A לכסינה?

לא. פ"מ לא מתפרק לגורמים לינארים שונים.

5. שאלה 2 באותו מבחן. תהא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(א) האם ניתן ללכסן את A? הסבר.

פתרון: A סימטרית, ולכן לפי משפט לכסינה או"ג, ובפרט לכסינה.

(ב) מצאו מטריצות $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ או"ג, $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ אלכסונית, כך ש- $P^TAP = \Lambda$.

פתרון: נתחיל למצוא ע"ע:

$$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 2 & -2 \\ 2 & x-4 & 4 \\ -2 & 4 & x-4 \end{pmatrix} \underset{R_3+R_2\to R_3}{=} \det\begin{pmatrix} x-1 & 2 & -2 \\ 2 & x-4 & 4 \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_2-C_3\to C_2}{=} \det\begin{pmatrix} x-1 & 4 & -2 \\ 2 & x-8 & 4 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$= x\left((x-1)(x-8)-8\right) = x(x(x-9)) = x^2(x-9)$$

נמצא ו"ע:

$$V_9 = N\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= N\begin{pmatrix} 0 & -18 & -18 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 2.5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 0.5t \\ -t \\ t \end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

אחרי שמוצאים את V_0 עושים לו גראם שמידט, ואז מנמרלים את כל הו"ע, ושמים ב-P.

(ג) בעזרת סעיף קודם, מצאו $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ סימטרית כך ש- $B^2 = A$.

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^T$$

נשים לב:

$$P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\underbrace{P^TP}_{=I}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^T=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&9\end{pmatrix}P^T=A$$

אז ניקח

$$B=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^T$$

והיא סימטרית כי לכסינה או"ג ע"י P.