מבחן סיום בקורס מבוא לאלגברה לינארית 89-119
מועד ב' סמסטר א' תשע"ז

מרצה: איתמר שטיין.
מתרגלת: אלכסנדרה סימנובסקי.
תאריך: כ"ה ניסן תשע"ז 21/4/17.
משך המבחן: שלוש שעות.
הוראות: יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. אם עניתם על 5 שאלות, יש לסמן באופן ברור 4 שאלות שאתם רוצים שתבדקנה. אחרת 4 השאלות הראשונות תבדקנה.
כל שאלה שווה 25 נקודות.
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי פשוט בלבד.
יש לנמק היטב את תשובותיכם!

1. נתונה מערכת משוואות לינאריות התלויה בפרמטרים a, b:

$$\begin{aligned} x+y+z&=a \\ x-y&=0 \\ 3x+y+bz&=0 \end{aligned}$$

עבור אילו ערכי a, b יש למערכת פתרון יחיד? אינסוף פתרונות? אין פתרון? במקרה של אינסוף פתרונות, מצאו גם את הפתרון הכללי.

פתרון: נעביר למטריצה ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & b & 0 \end{array}\right) \xmapsto{R_2=R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & -a \\ 3 & 1 & b & 0 \end{array}\right) \xmapsto{R_3=R_3-3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & -a \\ 0 & -2 & b-3 & -3a \end{array}\right) \xmapsto{R_3=R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & -a \\ 0 & 0 & b-2 & -2a \end{array}\right)$$

הגענו לצורה מדורגת. ראשית נבדוק מתי ייתכן שיש שורת סתירה. זה קורה כאשר $b=2$ ו $a \neq 0$. במצב זה אין פתרון. עכשיו נסתכל על משתנים חופשיים. בעמודה הראשונה והשניה יש איבר מוביל. לעמודה השלישית יש איבר מוביל רק אם $b \neq 2$. במצב זה ישש פתרון יחיד. המצב היחיד שנותר הוא $b=2$ ו $a=0$ שבו יש משתנה חופשי ואין שורת סתירה ולכן יש אינסוף פתרונות. במצב זה מערכת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נסמן $z=t$ ואז מהשורה השניה

$$-2y-t=0$$

כלומר

$$y=-\frac{1}{2}t$$

ומהשורה הראשונה

$$x+y+t=0$$

כלומר

$$x=\frac{1}{2}t-t=-\frac{1}{2}t$$

ולכן פתרון כללי יהיה

$$(-\frac{1}{2}t,-\frac{1}{2}t,t)$$

2. נתונות שתי מטריצות. קבעו לגבי כל מטריצה האם היא הפיכה. אם כן, חשבו גם את המטריצה ההופכית:

(א) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

פתרון: נשתמש באלגוריתם למציאת מטריצה הופכית

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_3=R_3+R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_3=R_3-R_2}{\longmapsto}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_3=-R_3}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_2=\frac{1}{2}R_2}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{R_2=R_2-2R_3}{\longmapsto}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{R_1=R_1-3R_3}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_1=R_1-R_2}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

ולכן המטריצה ההופכית היא

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(ב) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

פתרון: ברור מייד שהמטריצה לא הפיכה כי העמודה השניה והשלישית שלה תלויות לינארית. אבל נניח שלא שמנו לב לזה. אז אפשר לדרג לראות ש

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{R_2=R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{R_3=R_3-3R_1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \xmapsto{R_3=R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

התאפסה שורה ולכן ברור שהמטריצה לא הפיכה.

3. נתונה קבוצה של וקטורים ב $\mathbb{R}^3$:

$$X = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

(א) האם

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}?$$

אם כן, בטאו את $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הוקטורים ב X.

פתרון: בעצם השאלה היא אם קיימים x, y, z כך ש

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

כלומר יש כאן מערכת משוואות שצריך לפתור והיא מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

נדרג ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{R_2=R_2-R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{R_3=R_3-2R_1}{\longmapsto}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{R_3=R_3-R_2}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו שיש אינסוף פתרונות. אנחנו צריכים רק אחד. אז נציב $z = 1$ ונקבל

$$-y - z = 1$$

ולכן

$$y = -2$$

ולפי השורה הראשונה

$$x + y + 2z = 1$$

$$x = 2 - 2 + 1 = 1$$

כלומר צירוף לינארי אפשרי הוא

$$1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(ב) האם

$$?\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

אם כן, בטאו את $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של הוקטורים ב X.

פתרון: בדומה לסעיף הקודם, יש כאן מערכת משוואות שצריך לפתור והיא מיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

נדרג ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \overset{R_2=R_2-R_1}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \overset{R_3=R_3-2R_1}{\longmapsto}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{R_3=R_3-R_2}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

יש שורת סתירה ולכן אין פתרון. אין דרך לבטא את $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ בתור צירוף לינארי של הוקטורים ב X.

(ג) האם הקבוצה X בת"ל? ענו על סעיף זה על סמך התשובות של הסעיפים הקודמים, ובלי חישוב נוסף.

פתרון: לא. ראשית קל לראות שסכום שני הוקטורים הראשונים הוא הוקטור השלישי. אבל מבקשים תשובה המבוססת על הסעיפים הקודמים. אז נניח בשלילה שהיא בת"ל. היא קבוצה בגודל 3 ולכן לפי משפט השלישי חינם היא גם פורשת את $\mathbb{R}^3$. בסתירה לסעיף ב' בו ראינו שיש איבר שלא נפרש על ידיה.

4. (א) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

פתרון: נחשב לפי פיתוח לפי עמודה ראשונה

$$\begin{aligned} \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right| &= 1\left|\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right| - 2\left|\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right| \\ &= (-2-4) - 2(6+2) + (6-1) = \\ &= -6 - 16 + 5 = -17 \end{aligned}$$

(ב) תהי מטריצה B שדומה (בדמיון מטריצות) למטריצה A. מה הדטרמיננטה של המטריצה AB^t?

פתרון: הוכחנו בהרצאה שלמטריצות דומות יש את אותה דטרמיננטה ולכן

$$|B| = -17$$

ולכן

$$|AB^t| = |A||B^t| = |A||B| = (-17)(-17) = 289$$

5. נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את הערכים העצמיים של A.
פתרון: נחשב את הפולינום האופייני

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right|$$

נפתח את הדטרמיננטה לפי עמודה ראשונה

$$(1-\lambda)\left|\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right| - 0\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1-\lambda & 2 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) + (4 + (-1-\lambda))$$

$$= (\lambda^2-1)(3-\lambda) + 3 - \lambda$$

$$= 3\lambda^2 - \lambda^3 - 3 + \lambda 3 - \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 = \lambda^2(-\lambda+3)$$

לכן הערכים העצמיים שהם השורשים הם:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 3$$

(ב) מצאו בסיסים למרחבים העצמיים.
פתרון: עבור $\lambda = 0$ המרחב העתמי הוא מרחב האפס של A ולכן צריך פשוט למצוא בסיס למרחב האפס של A:אז נדרג את A בשביל למצוא פתרון למערכת ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{R_3=R_3-R_1}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{R_3=R_3-2R_2}{\longmapsto}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $z = t$ ואז לפי השורה השניה

$$y = 2t$$

ולפי השורה הראשונה

$$x + 2y - z = 0$$

כלומר

$$x = -4t + t = -3t$$

ולכן פתרון כללי יהיה

$$(-3t, 2t, t)$$

כלומר בסיס למרחב העצמי של $\lambda = 0$ יהיה:

$$\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

עכשיו נעבור לערך העצמי $\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שוב נדרג בשביל פתרון למערכת ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3 \leftrightarrow R_1}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_3 = R_3 + 2R_1}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{R_3 = R_3 + \frac{1}{2}R_2}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $z = t$ אז מהשורה השניה נקבל ש

$$y = \frac{1}{2}t$$

ומהשורה הראשונה נקבל ש $x = 0$ ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(0, \frac{1}{2}t, t)$$

ולכן בסיס למרחב העצמי של $\lambda = 3$ יהיה:

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

(ג) האם A לכסינה? נמקו.
פתרון: לא. הריבוי האלגברי של הערך העצמי $\lambda = 0$ הוא 2 אבל המימד של המרחב העצמי שלו הוא רק 1 ולכן המטריצה לא לכסינה.