רשימת הוכחות

1. אם יש לקבוצה חסם תחתון, אז הוא יחיד, ויסומן $infA$.

הוכחה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$.

נניח כי b, c חסמים תחתונים של A.

b בפרט חסם מלרע של A, לכן (c חסם תחתון): $c \leq b$.

c בפרט חסם מלרע של A, לכן (b חסם תחתון): $b \leq c$.

לכן: $b = c$.

לכן: $infA$ יחיד.

■

2. <u>צפיפות $\mathbb{Q}$ ב - $\mathbb{R}$</u>: בין כל שני מספרים ממשיים, יש מספר רציונאלי.

הוכחה

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, כך ש - $a < b$.

$0 < b - a$, לכן עפ״י תכונת ארכימדס, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש - $1 < n \cdot (b - a)$.

הקבוצה $\mathbb{Z} \supseteq \{m \in \mathbb{Z} : m < n \cdot b\} \neq \phi$ וחסומה מלעיל (למשל ע״י $n \cdot b$), לכן עפ״י למה (לכל קבוצה $\phi \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ קיים מקסימום), $k \coloneqq max\{m \in \mathbb{Z} : m < n \cdot b\}$ קיים.

אם: $k \leq n \cdot a$ אז: $k + 1 \leq n \cdot a + 1 < n \cdot b$, בסתירה למקסימאליות של k.

לכן: $n \cdot a < k$, ז״א: $n \cdot a < k < n \cdot b$, לכן: $a < \frac{\overbrace{k}^{\in\mathbb{Q}}}{n} < b$, כדרוש.

■

3. <u>יחידות הגבול</u>: אם a, b $lim_{n\to\infty} a_n = a, b$, אז: $a = b$.

הוכחה

נניח בלי הגבלת הכלליות: $a < b$.

יהי $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$.

- $a + \varepsilon < a + \frac{b-a}{2} = b - \frac{b-a}{2} < b - \varepsilon$, לכן: $|b - a| > 2 \cdot \varepsilon$.
- $a_n \to a$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

בנוסף: $a_n \to b$, לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - b| < \varepsilon$.

לכן, עבור $N = \max\{N_1, N_2\}$, מתקיים:

$$|b-a| = |(a_n - a) - (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2 \cdot \varepsilon$$

לכן: $2 \cdot \varepsilon > |b-a| < 2 \cdot \varepsilon$. סתירה.

לכן: $a = b$.

■

4. **אם $lim_{n\to\infty} a_n = a$ ו - $lim_{n\to\infty} b_n = b$, אז: $lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.**

הוכחה

עפ״י למה (סדרה מתכנסת חסומה), קיים $M_1 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| < M_1$, וקיים $M_2 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$: $|b_n| < M_2$.

כעת, נגדיר: $T = max\{|a|, |b|, M_1, M_2\}$.

אם $T = 0$, אזי לכל $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 0 \to 0$ ו - $b_n = 0 \to 0$, לכן:

$$a_n \cdot b_n = 0 \cdot 0 = 0 \to 0 = a \cdot b$$

לכן: $0 < T$.

יהי $0 < \varepsilon$.

$a_n \to a$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot T}$.

$b_n \to b$, לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n \in \mathbb{N}$: $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot T}$.

נגדיר $N = \max\{N_1, N_2\}$. לכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b|$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - a \cdot b|$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < M_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} < T \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} + T \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T}$$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < 2 \cdot T \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot T} = \varepsilon$$

לכן: $lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

■

5. **<u>משפט הסנדוויץ'</u>: תהיינה a_n, b_n שתי סדרות המתכנסות לאותו גבול c, ותהי c_n סדרה שלישית. אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq c_n \leq b_n$, אז: $\lim_{n\to\infty} c_n$.**

הוכחה

יהי $0 < \varepsilon$.

$a_n \to c$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - c| < \varepsilon$.

$b_n \to c$, לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n \in \mathbb{N}$: $|b_n - c| < \varepsilon$.

נגדיר: $N' = \max\{N, N_1, N_2\}$. לכל $N' < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon$$

לכן: $|c_n - c| < \varepsilon$, לכן: $\lim_{n\to\infty} c_n$.

■

6. **כל סדרה עולה וחסומה מתכנסת לסופרמום שלה. כל סדרה יורדת וחסומה מתכנסת לאינפימום שלה.**

הוכחה

נוכיח את הטענה הראשונה (הטענה השנייה באופן דומה).

תהי a_n סדרה עולה וחסומה.

עפ"י אקסיומת החסם העליון $s := supA$ קיים.

יהי $0 < \varepsilon$.

עפ"י תכונות של חסם עליון, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש - $s - \varepsilon < a_N < s$.

לכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n < s$$

לכן: $0 < s - a_n < \varepsilon$, ז"א: $|a_n - s| < \varepsilon$, לכן a_n מתכנסת ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s = supA$$

■

7. **הגבול $e := \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ קיים.**

הוכחה

נוכיח בשלושה שלבים:

- הסדרה: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה.

הוכחה

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \overset{\text{אי שוויון ברנולי}}{\geq} \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$a_n > a_{n+1}$$

- הסדרה $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ מונוטונית יורדת.

הוכחה

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} \cdot \left(1+n\cdot\frac{1}{n^2}\right) \overset{\text{אי שוויון ברנולי}}{\lesssim} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(\underbrace{1-\frac{1}{n^4}}_{<1}\right)^{n} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$b_n < b_{n+1}$$

- הסדרות b_n , a_n חסומות ומתכנסות לאותו גבול.

הוכחה

עפ"י הגדרת הסדרות b_n , a_n, לכל $n \in \mathbb{N}$: $a_n < b_n$. לכן, b_1 חסם מלעיל של הסדרה a_n ו - a_1 חסם מלרע של הסדרה b_n. לכן :

a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, לכן עפ"י משפט מתכנסת.

b_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע, לכן עפ"י משפט מתכנסת.

עפ"י הגדרת הסדרות b_n , a_n : $b_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$.

נפעיל גבול על שני האגפים ונקבל :

$$\lim b_n = \lim a_n \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim a_n \cdot 1 = \lim a_n$$

לכן : $e \coloneqq \lim a_n = \lim b_n$.

■

8. סדרה עולה שאינה חסומה מלעיל שואפת ל-∞. סדרה יורדת שאינה חסומה מלרע שואפת ל-$-\infty$.

הוכחה

נוכיח את הטענה הראשונה (הטענה השנייה באופן דומה).

תהי a_n סדרה עולה שאינה חסומה מלעיל.

יהי $M \in \mathbb{R}$.

a_n אינה חסומה מלעיל, לכן M אינו חסם מלעיל, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש - $M < a_N$.

a_n עולה לכן, לכל $N < n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $M < a_N \leq a_n$, לכן: $M < a_n$, לכן:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

■

9. **<u>משפט בולצאנו ויירשטרס</u>: לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.**

הוכחה

תהי a_n סדרה.

נאמר שאיבר a_m הוא נקודת שיא, אם לכל $m < n$ מתקיים: $a_m \geq a_n$.

קיימים שני מקרים:

1. יש בסדרה אינסוף נקודות שיא.

   נמספר אותן בסדר עולה: $a_{m_1} \geq a_{m_2} \geq a_{m_3} \geq \cdots$, $(m_1 < m_2 < m_3 < \cdots)$.

   קיבלנו תת סדרה יורדת a_{m_n}.

   a_n חסומה, לכן: a_{m_n} חסומה.

   לכן: a_{m_n} יורדת וחסומה, ועפ"י משפט מתכנסת.

2. יש בסדרה מספר סופי של נקודות שיא.

   נסמן m_1 כך ש - a_{m_1} אינה נקודת שיא, ולכל $m_1 < n$: a_n אינה נקודת שיא.

   a_{m_1} אינה נקודת שיא, לכן קיים $m_1 < m_2$ כך ש - $a_{m_1} < a_{m_2}$.

   a_{m_2} אינה נקודת שיא (הרי $m_1 < m_2$), לכן קיים $m_2 < m_3$ כך ש - $a_{m_2} < a_{m_3}$.

   נמשיך באותו אופן: $a_{m_1} < a_{m_2} < a_{m_3} < \cdots$, $(m_1 < m_2 < m_3 < \cdots)$

   קיבלנו תת סדרה עולה a_{m_n}.

   a_n חסומה, לכן: a_{m_n} חסומה.

   לכן: a_{m_n} עולה וחסומה, ועפ"י משפט מתכנסת.

לכן, בכל מקרה ל - a_n יש תת סדרה מתכנסת.

■

10. **סדרה a_n מתכנסת במובן הרחב ל - a $\boldsymbol{\lim a_n = a \Leftrightarrow \mathrm{limsup} a_n = \mathrm{liminf} a_n = a}$.**

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח: $\lim a_n = a$. לכן, כל תת סדרה של a_n שואפת ל $a -$ (הוכחה דומה להוכחת משפט 3 – נניח בשלילה כי קיימת תת סדרה a_{m_n} כך ש - $\lim a_{m_n} = a'$. עבור ε קטן מספיק, הסביבות $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ו - $(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$ זרות, ונקבל סתירה).

לכן: $\text{limsup}a_n = \text{liminf}a_n = a$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

נניח: $\text{limsup}a_n = \text{liminf}a_n = a$. נוכיח: $\lim a_n = a$.

- אם $a \in \mathbb{R}$.

  נוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$, לבסוף $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

  נניח בשלילה כי קיימים אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$ כך ש - $a_n \le a - \varepsilon$.

  תהי b_n תת הסדרה המורכבת מערכים אלו.

  עפ"י משפט, ל - b_n קיימת תת סדרה מתכנסת c_n.

  לכן: $c_n \le a - \varepsilon$, $c \leftarrow c_n$, לכן עפ"י משפט: $c \le a - \varepsilon < a = \text{liminf}a_n$.

  אולם, c_n בפרט תת סדרה של a_n, לכן: $c \ge \text{liminf}a_n$. סתירה.

  באופן דומה, לא יתכן כי קיימים אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$ כך ש - $a + \varepsilon \le a_n$.

- אם $a = \infty$.

  באופן דומה נוכיח כי לכל $M \in \mathbb{R}$, לבסוף $a_n \in (M, \infty)$.

- אם $a = -\infty$.

  הוכחה דומה למקרה $a = \infty$.

לכן, לכל $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: $\lim a_n = a$.

■

11. <u>התכנסות טור תלויה בזנב</u>: התכונות הבאות שקולות:

1. הטור מתכנס.

2. כל זנב של הטור מתכנס.

3. קיים לטור זנב שמתכנס.

הוכחה

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$

נניח כי הטור מתכנס.

נסמן: $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

יהי $m \in \mathbb{N}$. נוכיח כי r_m מתכנס.

הסדרה $(s_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ מתקבלת מהסדרה $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ע״י מחיקת מספר סופי של איברים,

לכן: $s_{m+n} \to s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

לכל $n \in \mathbb{N}$: $s_{m+n} = s_m + \overbrace{(a_{m+1} + \cdots + a_{m+n})}^{=s_n{}'}$.

לכן: $s_n' = s_{m+n} - s_m \to s - s_m \in \mathbb{R}$.

לכן: $r_m = s - s_m$, ולכן מתכנס.

$\boxed{3 \Leftarrow 2}$

נניח כי כל זנב של הטור מתכנס. בפרט, קיים לטור זנב שמתכנס.

$\boxed{1 \Leftarrow 3}$

נניח כי קיים לטור זנב שמתכנס, נסמנו r_m.

מהוכחת המעבר הראשון: $s_{m+n} = s_m + s_n{}'$, לכן: $s_{m+n} \to s_m + r_m$.

הסדרה $(s_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ מתקבלת מהסדרה $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ע״י מחיקת מספר סופי של איברים,

לכן: $s_n \to s_m + r_m$.

■

12. <u>מבחן ההשוואה הגבולי</u>: יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים. אם הגבול $\frac{a_n}{b_n} \to c$ קיים וכן $0 < c < \infty$, אזי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

<u>טענה</u>: אם קיימים קבועים $0 < c', c''$ כך שלבסוף $c' < \frac{a_n}{b_n} < c''$, אז הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

לבסוף $a_n < c'' \cdot b_n$.

אם $\sum b_n < \infty$, אזי עפ״י משפט: $\sum c'' \cdot b_n = c'' \cdot \sum b_n < \infty$.

עפ״י מבחן ההשוואה: $\sum a_n < \infty$.

לבסוף $c' \cdot b_n < a_n$.

אם $\sum a_n < \infty$, אזי עפ״י מבחן ההשוואה $c' \cdot \sum b_n = \sum c' \cdot b_n < \infty$.

עפ״י משפט: $\sum b_n < \infty$.

ניקח $\varepsilon > 0$ כך ש - $0 < c - \varepsilon$ (למשל: $\varepsilon = \frac{c}{2}$).

$\frac{a_n}{b_n} \to c$, לכן לבסוף $0 < c - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$.

עפ״י הטענה (עם: $c' = c - \varepsilon\, , c'' = c + \varepsilon$): $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

■

13. <u>מבחן השורש (קושי)</u>: יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

1. אם קיים $0 < q < 1$ כך שלבסוף $\sqrt[n]{a_n} < q$, אז $\sum a_n$ מתכנס.
2. אם $\sqrt[n]{a_n} \to c < 1$, אז $\sum a_n$ מתכנס.
3. אם לבסוף $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, אז $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה

1. לבסוף $\sqrt[n]{a_n} < q$, לכן $a_n < q^n$.
   $\sum q^n$ טור הנדסי ו - $0 < q < 1$, לכן: $\sum q^n$ מתכנס.
   עפ"י מבחן ההשוואה: $\sum a^n$ מתכנס.
2. $\sqrt[n]{a_n} \to c < 1$.

ניקח $\varepsilon > 0$ כך ש - $c + \varepsilon < 1$ (למשל: $\varepsilon = \frac{1-c}{2}$).

לבסוף $\sqrt[n]{a_n} < c + \varepsilon < 1$, ועפ"י סעיף (1) נקבל את הדרוש.

3. לבסוף $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, לכן לבסוף $a_n \geq 1$.

לכן: $a_n \nrightarrow 0$, ועפ"י משפט $\sum a_n$ מתבדר.

■

14. <u>מבחן העיבוי</u>: אם הסדרה a_n חיובית ויורדת, אז הטורים $\sum a_n$, $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

הוכחה

נניח כי $\sum a_n$ מתכנס, ונוכיח כי $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

הסדרה a_n יורדת, לכן:

$$a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$$

$\sum a_n$ טור חיובי, לכן עפ"י חוק הקיבוץ:

$$a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots$$

$\sum a_n$ מתכנס, לכן הטור: $a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots$ מתכנס.

$$a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8 + \cdots) = \frac{1}{2} \cdot \sum 2^n \cdot a_{2^n}$$

לכן, $\frac{1}{2} \cdot \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס, לכן: $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

נניח כי נניח כי $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס, ונוכיח כי $\sum a_n$ מתכנס.

הסדרה a_n יורדת, לכן:

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \leq a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \cdots$$

$\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס, לכן $a_1 + \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנס.

עפ״י מבחן ההשוואה הטור: $a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$ מתכנס.

$\sum a_n$ טור חיובי, לכן עפ״י חוק הקיבוץ $\sum a_n$ מתכנס.

לכן: הטורים $\sum a_n$, $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

■

15. <u>מבחן לייבניץ</u>: אם a_n סדרה יורדת ושואפת ל – 0, אז:

1. הטור $\sum(-1)^{n+1} \cdot a_n$ מתכנס.
2. שאריות הטור מקיימות $|r_m| < a_{m+1}$ וסימנן $(-1)^m$.
3. עבור m זוגי: $s_m \le s \le s_{m+1}$, ועבור m אי זוגי: $s_m \ge s \ge s_{m+1}$.

הוכחה

1. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים s_{2n} של הטור $\sum(-1)^{n+1} \cdot a_n$.

הסדרה a_n יורדת, לכן:

$$s_{2n} = (a_1 - a_2)_{\ge 0} + (a_3 - a_4)_{\ge 0} + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})_{\ge 0} \ge 0$$

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3)_{\ge 0} - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1})_{\ge 0} - a_{2n_{\ge 0}} \le a_1$$

לכן: s_{2n} סדרה עולה וחסומה, לכן עפ״י משפט מתכנסת, נסמן: $s_{2n} \to s$.

מתקיים: $s_{2n-1} = s_{2n} - a_{2n}$, לכן: $s_{2n-1} \to s - 0 = s$.

לכן: $s_{2n-1}, s_{2n} \to s$. $\{2 \cdot n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, לכן: $s_n \to s$.

אזי, הטור: $\sum(-1)^{n+1} \cdot a_n$ מתכנס.

2. עפ״י סעיף (1): $0 \le s_{2n} \le a_1$, לכן: $0 \le s \le a_1$, ועובדה זו נכונה לכל טור כבניסוח המשפט, בפרט עבור זנב הטור r_m עבור m זוגי. לכן: $0 \le r_m \le a_{m+1}$ עבור m זוגי.

עבור m אי זוגי, הטור $-r_m$ מקיים את סעיף (1), לכן: $0 \le -r_m \le a_{m+1}$.

לכן: שאריות הטור מקיימות $|r_m| < a_{m+1}$ וסימנן $(-1)^m$.

3. עבור m זוגי: עפ״י סעיף (2): $s_m \le \overbrace{s_m + r_m}^{=s} \le \overbrace{s_m + a_{m+1}}^{=s_{m+1}}$, לכן:

$$s_m \le s \le s_{m+1}$$

עבור m אי זוגי באופן דומה.

■

16. <u>קריטריון קושי להתכנסות סדרות</u>: סדרה a_n מתכנסת $\Leftrightarrow$ לכל $0 < \varepsilon$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח $a_n \to a$.

יהי $0 < \varepsilon$.

$a_n \to a$, לכן, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon.$.

לכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| < |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח כי לכל $0 < \varepsilon$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

<u>טענה</u>: a_n חסומה.

הוכחה

עפ"י ההנחה, בפרט עבור $\varepsilon = 1$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n - a_m| < 1$. בפרט, עבור $m = N + 1$, לכל $N < n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| - |a_{N+1}| \le |a_n - a_{N+1}| < 1$$

לכן, לכל $N < n \in \mathbb{N}$: $|a_n| < |a_{N+1}| + 1$.

נגדיר: $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\}$.

עפ"י הגדרת M, לכל $n \in \mathbb{N}$: $|a_n| < M$, לכן a_n חסומה.

עפ"י משפט בולצאנו ויירשטרס, ל - a_n קיימת תת סדרה מתכנסת $a_{m_n} \to a$.

נוכיח $a_n \to a$.

יהי $0 < \varepsilon$.

$a_{m_n} \to a$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_1 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

עפ"י ההנחה, קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N_2 < n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

נגדיר $N = \max\{N_1, N_2\}$.

לכל $N < n \in \mathbb{N}$ $(n < m_n)$:

$$|a_n - a| = |(a_n - a_{m_n}) + (a_{m_n} - a)| \le |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

לכן: $a_n \to a$, ובפרט מתכנסת, כדרוש.

■

17. <u>מבחן דיריכלה</u>: אם a_n מונוטונית שואפת ל 0 – ו $\sum b_n$ טור חסום, אזי $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס.

הוכחה

מספיק להוכיח עבור $a_n \searrow 0$. הרי, אם $a_n \nearrow 0$, הסדרה $-a_n \searrow 0$, ואז $\sum(-a_n) \cdot b_n$ מתכנס. עפ"י משפט: $\sum(-a_n) \cdot b_n = -\sum a_n \cdot b_n$, לכן $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס.

תהי אפוא $a_n \searrow 0$.

נוכיח בעזרת קריטריון קושי להתכנסות טורים.

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum b_n$ ב - s_n.

יהי $0 < \varepsilon$.

יהיו $m < n \in \mathbb{N}$.

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} \cdot b_{m+1} + \cdots + a_n \cdot b_n|$$

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} \cdot (s_{m+1} - s_m) + \cdots + a_n \cdot (s_n - s_{n-1})|$$

$$|s_n - s_m| = |-a_{m+1} \cdot s_m + (a_{m+1} - a_{m+2}) \cdot s_{m+1} + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \cdot s_{n-1} + a_n \cdot s_n|$$

עפ"י אי שוויון המשולש:

$$|s_n - s_m| \leq |a_{m+1}| \cdot |s_m| + |a_{m+1} - a_{m+2}| \cdot |s_{m+1}| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| \cdot |s_{n-1}| + |a_n| \cdot |s_n|$$

$\sum b_n$ חסום, לכן קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|s_k| < M$. לכן:

$$|s_n - s_m| < |a_{m+1}| \cdot M + |a_{m+1} - a_{m+2}| \cdot M + \cdots + |a_{n-1} - a_n| \cdot M + |a_n| \cdot M$$

$$|s_n - s_m| < (|a_{m+1}| + |a_{m+1} - a_{m+2}| + \cdots |a_{n-1} - a_n| + |a_n|) \cdot M$$

a_n מונוטונית יורדת שואפת ל – 0, לכן:

$$|s_n - s_m| < (a_{m+1} + a_{m+1} - a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} - a_n + a_n) \cdot M$$

$$|s_n - s_m| < 2 \cdot a_{m+1} \cdot M$$

$a_n \to 0$, לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < m + 1 \in \mathbb{N}$ מתקיים: $a_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$.

לכל $N < m < n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|s_n - s_m| < 2 \cdot M \cdot a_{m+1} < 2 \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M} = \varepsilon$.

לכן: $\sum a_n \cdot b_n$ מתכנס.

18. אם טור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אזי שינוי סדר איבריו לא ישנה את סכומו.

הוכחה

<u>טענה</u>: אם טור אי שלילי $\sum a_n$ מתכנס, אזי לכל תמורה $P(n)$ מתקיים: $\sum a_{P(n)} = \sum a_n$.

הוכחה

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum a_n$ ב - s_n ואת סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum a_{P(n)}$ ב - s^P.

$$s_n^P = a_{P(1)} + \cdots + a_{P(n)} \leq a_1 + \cdots + a_{\max\{a_{P(1)}, \cdots, a_{P(n)}\}} \leq s$$

$\sum a_n$ מתכנס, לכן $\sum a_{P(n)}$ מתכנס ומתקיים: $s_P \leq s$.

הנ"ל נכון לכל טור אי שלילי מתכנס $\sum a_n$ ולכל תמורה $P(n)$, לכן בפרט עבור הטור האי שלילי $\sum a_{P(n)}$ והתמורה $P^{-1}(n)$. לכן:

$$s = \sum a_{P^{-1}(P(n))} \leq \sum a_{P(n)} = s^P$$

לכן: $s^P \leq s \leq s^P$, אזי: $s^P = s$.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט, לכן $\sum|a_n|$ מתכנס, לכן עפ"י הטענה $\sum|a_{P(n)}|$ מתכנס ו - $\sum|a_{P(n)}| = \sum|a_n|$.

$\sum|a_{P(n)}|$ מתכנס, לכן $\sum a_{P(n)}$ מתכנס בהחלט.

$\sum a_n$ מתכנס בהחלט, לכן עפ"י משפט $\sum p_n, \sum q_n$ מתכנסים ו - $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ עבור הטורים האי שליליים $\sum p_n, \sum q_n$ המתאימים.

$\sum a_{P(n)}$ מתכנס בהחלט, לכן עפ"י משפט $\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ מתכנסים ו – $\sum a_{P(n)} = \sum p_{P(n)} - \sum q_{P(n)}$ עבור הטורים האי שליליים $\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ המתאימים.

$\sum p_{P(n)}, \sum q_{P(n)}$ מתכנסים, לכן עפ"י הטענה $\sum q_{P(n)} = \sum q_n$, $\sum p_{P(n)} = \sum p_n$. לכן:

$$\sum a_{P(n)} = \sum p_{P(n)} - \sum q_{P(n)} = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$$

לכן: $\sum a_{P(n)} = \sum a_n$.

■

19. **אם $\sum a_n$, $\sum b_n$ מתכנסים בהחלט, אזי: $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=max\{i,j\}=n} a_i \cdot b_j$ מתכנס בהחלט. בפרט, סדר סכימת המכפלות אינו משנה את הסכום (ובפרט ניתן לסכום לפי אלכסונים).**

הוכחה

<u>טענה</u>: אם $\sum a_n$, $\sum b_n$ מתכנסים, אזי: $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=max\{i,j\}=n} a_i \cdot b_j$ מתכנס.

הוכחה

נסמן ב - s_n את סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=max\{i,j\}=n} a_i \cdot b_j$.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{max\{i,j\}=k} a_i \cdot b_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i \cdot b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j \to \sum a_n \cdot \sum b_n$$

כדרוש.

כעת, עפ"י הטענה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{max\{i,j\}=n} |a_i \cdot b_j| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{max\{i,j\}=n} |a_i| \cdot |b_j| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

לכן: $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=max\{i,j\}=n} a_i \cdot b_j$ מתכנס בהחלט.

עפ"י משפט, שינוי סדר האיברים בטור הנ"ל אינו משנה את סכומו, לכן לא משנה סדר סכימת המכפלות.

■

20. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

הוכחה

נתבונן במעגל היחידה (לקביעת x ולהמחשה ראה הרצאה 17).

עבור: $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

עפ"י השוואת שטחי המשולש החסום בגזרה, הגזרה והמשולש החוסם את הגזרה:

$$\frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{2} < \pi\cdot 1^2\cdot\frac{x}{2\cdot\pi} < \frac{\tan(x)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin(x)\cdot\cos(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$1 \xleftarrow[x\to 0^+]{} \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

עפ"י משפט הסנדוויץ': $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

עבור $-\frac{\pi}{2} < x < 0$:

$0 < -x < \frac{\pi}{2}$, לכן:

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < \frac{1}{\cos(-x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$$

ועפ"י משפט הסנדוויץ': $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

עפ"י משפט: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

■

21. **תכונות שקולות לרציפות f בנקודה a:**

1. **לכל $0<\varepsilon$, קיים $0<\delta$ כך לשכל $x\in domf$ המקיים: $|x-a|<\delta$: $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.**
2. **$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$.**
3. **לכל סדרה $a_n\to a$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n\in domf$, מתקיים: $f(a_n)\to f(a)$.**

הוכחה

1. $\boxed{\Leftarrow}$

נניח $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

לכן, לכל $0<\varepsilon$, קיים $0<\delta$ כך שלכל $x\in domf$ המקיים: $0<|x-a|<\delta$,

מתקיים: $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

אם $x=a$, אז: $f(x)=f(a)$, לכן: $|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$.

לכן, התנאי מתקיים לכל $x\in domf$ המקיים: $|x-a|<\delta$.

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח שלכל $0<\varepsilon$, קיים $0<\delta$ כך לשכל $x\in domf$ המקיים: $|x-a|<\delta$:

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

בפרט, לכל $0<\varepsilon$, קיים $0<\delta$ כך לשכל $x\in domf$ המקיים: $0<|x-a|<\delta$:

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

לכן: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

2. $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a) \underset{h:=x-a}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, הרי $h\to 0 \Leftrightarrow x\to a$.

3. $\boxed{\Leftarrow}$

נניח $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

תהי $a_n\to a$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$: $a_n\in domf$ ו - $f(a_n)\to f(a)$.

נסמן: $J=\{n\in\mathbb{N} : a_n\neq a\}$, $I=\{n\in\mathbb{N} : a_n=a\}$.

- אם I סופית.

  לבסוף $a_n\neq a$. תהי b_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש - $n\in J$.

  b_n מקיימת את הגדרת הגבול לפי היינה, לכן עפ"י ההנחה: $f(b_n)\to f(a)$.

  מכיוון שמספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הסדרה: $f(a_n)\to f(a)$.

- אם J סופית.

  לבסוף $a_n=a$. תהי c_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש - $n\in I$.

  $f(b_n)=f(a)\to f(a)$ כסדרה קבועה.

  מכיוון שמספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הסדרה: $f(a_n)\to f(a)$.

- אם I,J אינסופיות.

תהי b_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש - $n \in J$.

תהי c_n הסדרה המורכבת מאיברי a_n כך ש - $n \in I$.

עפ"י אותם הנימוקים: $f(b_n) \to f(a)$ ו - $f(c_n) \to f(a)$.

משום ש - $I \cup J = \mathbb{N}$: $f(a_n) \to f(a)$.

לכן, בכל מקרה $f(a_n) \to f(a)$, כדרוש.

$\boxed{\Longrightarrow}$

נניח כי לכל סדרה $a_n \to a$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in domf$, מתקיים: $f(a_n) \to f(a)$.

בפרט, לכל סדרה $a_n \to a$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a \neq a_n \in domf$, מתקיים: $f(a_n) \to f(a)$.

עפ"י הגדרת הגבול לפי היינה: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

■

22. אם f רציפה ב – a ו – g רציפה ב - $b \coloneqq f(a)$, אז $f \circ g$ רציפה ב - a.

הוכחה

נשתמש בניסוח השקול (1) ממשפט 19.

יהי $0 < \varepsilon$.

g רציפה ב – b, לכן קיים $0 < \delta_1$ כך שלכל $|y - b| < \delta_1$: $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$.

f רציפה ב - a, לכן קיים $0 < \delta_2$ כך שלכל $|x - a| < \delta_2$: $|f(x) - f(a)| < \delta_1$.

לכן, לכל $|x - a| < \delta_2$: $\left|\overbrace{f(x)}^{=y} - \overbrace{f(a)}^{=b}\right| < \delta_2$, לכן: $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.

■

23. <u>משפט ערך הביניים</u>: אם f רציפה בקטע $[a, b]$ ו - $f(a) < f(b)$, לכל $f(a) < d < f(b)$ קיים $a < c < b$ כך ש - $f(c) = d$.

משפט דומה עבור $f(a) > f(b)$.

הוכחה

יהי $f(a) < d < f(b)$.

נגדיר: $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq d\}$.

$f(a) < d$, לכן: $a \in A$, לכן $A \neq \phi$.

$\forall x \in A : x \leq b$, לכן: A חסומה מלעיל.

עפ"י אקסיומת החסם העליון, $c \coloneqq supA$ קיים.

- $a < c$.

f רציפה מימין ב - a, לכן: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

תהי $a \searrow x_n$.

עפ״י הגדרת הגבול לפי היינה, $f(x_n) \to f(a)$. $f(a) < d$, לכן לבסוף: $f(x_n) < d$, ז״א: $x_n \in A$.

לכן, לבסוף: $a < x_n \le c$, לכן: $a < c$.

- $c < b$.

נניח בשלילה כי $c = b$.

תהי $A \ni x_n \to c$.

f רציפה משמאל ב - c, לכן $f(x_n) \to f(c)$, והרי $f(b) = f(c)$ וכן - $d < f(b)$, לכן: $f(x_n) \to f(c) > d$. לכן, לבסוף: $d < f(x_n)$, בסתירה לכך ש - $x_n \in A$.

לכן: $c < b$.

- $f(c) = d$.

נניח בשלילה ש - $f(c) < d$.

תהי $c \searrow x_n$, לכן: $f(x_n) \to f(c) < d$, לכן לבסוף $f(x_n) < d$, ז״א: $x_n \in A$.

לכן, לבסוף: $c < x_n \le c$. סתירה.

נניח בשלילה ש - $d < f(c)$.

תהי $A \ni x_n \to c$, לכן $f(x_n) \to f(c) > d$, לכן לבסוף: $d < f(x_n)$, בסתירה לכך ש - $x_n \in A$.

לכן: $f(c) = d$, כדרוש.

■

24. <u>למת ויירשטרס</u>: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, חסומה שם.

הוכחה

נוכיח עבור פונקציה חסומה מלעיל (עבור חסומה מלרע באופן דומה)

נניח בשלילה כי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אך אינה חסומה מלעיל שם.

לכן, בפרט כל $n \in \mathbb{N}$ אינו חסם מלעיל של f בקטע, לכן קיים $a \le x_n \le b$ כך ש - $n < f(x_n)$.

x_n חסומה (מלרע ע״י a, מלעיל ע״י b), לכן עפ״י משפט ויירשטרס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $c_n \to c$. לכל $n \in \mathbb{N}$: $a \le c_n \le b$, לכן: $a \le c \le b$.

$n < f(x_n) \Leftarrow \infty$, לכן $f(x_n) \to \infty$. $f(c_n)$ תת סדרה של $f(x_n)$, לכן: $f(c_n) \to \infty$.

f רציפה בקטע $[a,b]$, לכן בפרט ב - c, לכן: $f(c_n) \to f(c) \in \mathbb{R}$.

$$\overbrace{f(c)}^{\in\mathbb{R}} \leftarrow f(c_n) \rightarrow \overbrace{\infty}^{\notin\mathbb{R}}$$

סתירה.

לכן: f חסומה בקטע $[a,b]$, כדרוש.

■

25. <u>משפט ויירשטרס</u>: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, מקבלת מקסימום ומינימום שם.

הוכחה

נגדיר $A=\{f(x) : a\le x\le b\}$.

$A\neq\phi$, וחסומה עפ"י למת ויירשטרס.

עפ"י אקסיומת החסם העליון $s=supA$ קיים.

תהי $A\ni f(x_n)\rightarrow s$.

לכל $n\in\mathbb{N}$: $a\le x_n\le b$, לכן x_n חסומה. עפ"י משפט ויירשטרס, קיימת לה תת סדרה מתכנסת $c_n\rightarrow c$. לכל $n\in\mathbb{N}$: $a\le c_n\le b$, לכן: $a\le c\le b$.

$f(c_n)$ תת סדרה של $f(x_n)$, לכן: $f(c_n)\rightarrow s$.

f רציפה ב - c, לכן: $f(c_n)\rightarrow f(c)$.

$$f(c)\leftarrow f(c_n)\rightarrow s$$

ומיחידות הגבול: $s=f(c)\in A$, לכן: $s=maxA$, ובפרט $maxA$ קיים.

באופן דומה, $minA$ קיים.

■

26. <u>משפט קנטור</u>: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, רציפה במידה שווה שם.

הוכחה

נניח בשלילה כי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אך אינה רציפה במידה שווה שם.

עפ"י משפט, קיימות שתי סדרות $x_n,y_n\in[a,b]$ כך ש - $x_n-y_n\rightarrow 0$, אולם: $f(x_n)-f(y_n)\nrightarrow 0$.

יהי $\varepsilon>0$ כך ש - $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$ עבור אינסוף ערכי n.

ע"י מעבר לתתי הסדרות הנקבעות ע"י ערכים אלו (שמקיימות גם הן את השלילה), ניתן להניח $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

לכל $n\in\mathbb{N}$: $a\le x_n\le b$, לכן x_n חסומה. עפ"י משפט ויירשטרס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $x_{m_n}\rightarrow c$.

$x_{m_n} - y_{m_n} \to 0$ כתת סדרה של $x_n - y_n$, לכן (עפ״י אריתמטיקה של גבולות):
$y_{m_n} \to c$.

לכל $n \in \mathbb{N}$: $a \le x_{m_n} \le b$, לכן: $a \le c \le b$.

מרציפות f ב c: $f(x_{m_n}) \to f(c)$ ו- $f(y_{m_n}) \to f(c)$.

לכן (עפ״י אריתמטיקה של גבולות): $f(x_{m_n}) - f(y_{m_n}) \to 0$, לכן, בפרט עבור $0 < \varepsilon$,

לבסוף: $|f(x_{m_n}) - f(y_{m_n})| < \varepsilon$, לכן בפרט: $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ עבור אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$. סתירה.

לכן: f רציפה במידה שווה בקטע $[a,b]$, כדרוש.

■

27. <u>כלל השרשרת</u>: $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

הוכחה

$$\left(f(g(x))\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

נכפול ונחלק ב - $g(x+h) - g(x)$:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f\left(\overbrace{g(x+h)}^{:=a}\right) - f(g(x))}{\underbrace{g(x+h)}_{:=a} - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

כדי להימנע ממכנה 0, נגדיר פונקציה:

$$D(h) = \begin{cases} \dfrac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} & , \quad g(x+h) \neq g(x) \\ f'(g(x)) & , \quad g(x+h) = g(x) \end{cases}$$

עפ״י הגדרת $D(h)$, לכל h:

$$(*) \qquad \overbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}}^{\to (f(g(x)))'} = D(h) \cdot \overbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}^{\to g'(x)}$$

נוכיח כי $D(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f'(g(x))$, ואז, נפעיל גבול על שני אגפי השוויון ונקבל את הדרוש.

נעבוד בלשון הסדרות.

תהי $h_n \to 0$.

לסדרה שתי תתי סדרות:

1. האיברים h_n כך ש - $g(x+h_n) \neq g(x)$.
2. האיברים h_n כך ש - $g(x+h_n) = g(x)$.

אם אחת מתתי הסדרות סופית, היא אינה משפיעה על גבול הסדרה h_n, לכן ניתן להניח כי אנו תמיד באותו מקרה.

1. אם $g(x+h_n) \neq g(x)$.

עפ"י הגדרת $D(h)$: $D(h) = \frac{f(g(x+h_n))-f(g(x))}{g(x+h_n)-g(x)}$.

$h_n \to 0$, לכן מרציפות g ב - x: $g(x) \neq g(x+h_n) \to g(x)$.

לכן:

$$D(h) = \frac{f(g(x+h_n))-f(g(x))}{g(x+h_n)-g(x)} \to \lim_{a \to g(x)} \frac{f(a)-f(g(x))}{a-g(x)} = f'(g(x))$$

2. אם $g(x+h_n) = g(x)$.

עפ"י הגדרת $D(h)$: $D(h) = f'(g(x))$.

לכן: $D(h) \to f'(g(x))$, כסדרה קבועה.

אם שתי הסדרות אינסופיות, נראה באופן דומה כי הטענה נכונה עבור כל אחת מתתי הסדרות, ומשום ששתיהן מכסות את כל הסדרה, עפ"י משפט: $D(h_n) \to f'(g(x))$.

לכן: $D(h) \xrightarrow[h \to 0]{} f'(g(x))$. מהפעלת גבול על שני אגפי השוויון (*), נקבל:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

■

28. <u>משפט רול</u>: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). אם $f(a) = f(b)$, קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש - $f'(c) = 0$.

הוכחה

f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, לכן עפ"י משפט ויירשטרס מקבלת מקסימום ומינימום שם.

- אם $\min f = \max f$.

  f פונקציה קבועה בקטע $[a,b]$. לכן, לכל $a < c < b$: $f'(c) = 0$, כנגזרת של פונקציה קבועה.

- אם $\min f \neq \max f$.

  $f(a) = f(b)$, לכן לא ייתכן כי $\min f = a$ ו - $\max f = b$ (או ההיפך).

  תהי אפוא $a < c < b$ נקודת אקסטרמום.

  עפ"י משפט פרמה: $f'(c) = 0$, כדרוש.

■

29. <u>משפט הערך הממוצע (לגרנז')</u>: תהי f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b). קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש - $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה

משוואת הישר העובר בנקודות $(a,f(a))$ ו - $(b,f(b))$:

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a)$$

y פולינום, לכן רציף וגזיר בכל $\mathbb{R}$. f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), לכן $\tilde{f}$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), כסכום של פונקציות רציפות וגזירות בקטעים המתאימים.

נגדיר פונקציה: $\tilde{f}=f-y$. עפ"י הגדרת $\tilde{f}$, לכל $x\in[a,b]$:

$$\tilde{f}(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$f(a)=f(b)=0$$

עפ"י משפט רול, קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש - $\tilde{f}'(c)=0$.

עפ"י הגדרת $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}'(c)=(f-y)'(c)=f'(c)-y'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

כדרוש.

■

30. <u>משפט לופיטל</u>: יהיו $\lambda\in\{0,\infty\}$ ו - $-\infty\le a,b\le\infty$. יהיו f,g רציפות בסביבה מנוקבת של a ומקיימות שם:

1. **$g'(x)\neq 0$.**
2. **$f(x),g(x)\xrightarrow[x\to a]{}\lambda$.**
3. **$\frac{f'(x)}{g'(x)}\xrightarrow[x\to a]{}b$ במובן הרחב.**

אז: $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to a]{}b$.

המשפט נכון גם עבור סביבה חד צדדית של a וגבולות חד צדדיים מתאימים.

הוכחה

ראה הרצאה 24.

■