

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{n^n} \quad \text{ג.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2)}{x} \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^{10}) e^{\sin(7x)}}{(1 - \cos(5x))^5} \quad \text{א.}$$

2. נתונה הסדרה הבאה ע"י כלל נסיגה $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2}$ ונתון כי $a_1 > 0$.

א. מצאו ערך של a_1 עבורו הסדרה עולה.

ב. עבור הערך שמצאתם בסעיף א', הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

$$3. \text{ נביט בפונקציה } f(x) = \begin{cases} \sin(x) + a^2 & x \geq 0 \\ ax + 1 & x < 0 \end{cases}$$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

4. יהי מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^{2n+1} + x = 1$.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^4 + x = n$.

5. תהינה פונקציה f הגזירה בכל הממשיים.

א. נניח כי $f(0) < f(1)$ וגם $f(2) < f(1)$, הוכיחו כי קיימת נק' בה $f'(x) = 0$.

ב. נניח כי לכל $x > 0$ מתקיים כי $f(x) > f(0)$, הוכיחו/הפריכו: לכל $x > 0$ מתקיים $f'(x) \geq 0$.