לינארית 2 תשפ`ב מועד א

מרצה: ד"ר עדי בן צבי.
מתרגלים: אריאל ויצמן, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל, עקיבא מלכה.
יש לענות על כל שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 107 נק.
זמן הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. יהי V ממ`פ מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס או`נ ל V. יהי $v\in V$ אזי ניתן להציגו כצי`ל של איברי B, כלומר קיימים סקלרים כך ש $v=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n$. הוכיחו
$$||v||^2=|\alpha_1|^2\cdot||v_1||^2+\ldots+|\alpha_n|^2||v_n||^2$$
(15 נק)

2. אין קשר בין הסעיפים:
   (א) האם המטריצה הבאה לכסינה אוניטרית?
$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$
   במידה וכן מצאו P אוניטרית ו D אלכסונית כך ש $P^*AP=D$. (10 נק)
   (ב) תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית כך שקיים $k\in\mathbb{N}$ המקיים $A^k=I$, הוכיחו A או`ג. (13 נק)

3. יהי V ממ`פ ממימד סופי, ותהי $T:V\longrightarrow V$ הע`ל המקיימת $T=T^2$.
   (א) האם T בהכרח לכסינה? (5 נק)
   (ב) הוכיחו $ImT=ker(I-T)$.(7 נק)
   (ג) נניח כי בנוסף T נורמלית
      i. הוכיחו כי T צמודה לעצמה (8 נק)
      ii. הוכיחו כי קיים ת`מ $W\subseteq V$ המקיים:
$$(\forall w\in W:\ T(w)=w)\quad\wedge\quad(\forall u\in W^{\perp}:\ T(u)=0)$$
(11 נק)

4. תהי $A\in\mathbb{C}^{5\times 5}$ המקיימת $rankA=4,\ rank(A-2I)=3$. בנוסף נתון כי $A(A-2I)(A-5)^2=0$. מהן צורות הז'ורדן האפשריות ל A?(10 נק)

5. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק לסעיף)
   (א) תהי $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ המקיימת $|A|=0$ וגם $A^2\neq 0$ אזי A לכסינה.
   (ב) יהי V מ`ו. ותהיינה $<,>_1,<,>_2$ שתי מ`פ שונות על V. אזי קיים בסיס B ל V כך שהוא או`נ לפי שתי המכפלות הפנימיות.
   (ג) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ צל`ע. אזי, $A-(i+1)I$ הפיכה.
   (ד) יהי Vממ`פ מעל $\mathbb{R}$ ויהי $U$ ת`מ שלו. יהי $v\in V$ ונסמן ב p את ההיטל שלו על U. אזי,
$$v\in U^{\perp}\Longleftarrow||v+p||=||v-p||$$

בהצלחה!!

שאלה 1: הי V ממ`פ מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס או`נ ל V. יהי $v \in V$ אזי ניתן להציגו כצי`ל של איברי B, כלומר קיימים סקלרים כך ש $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. הוכיחו

$$||v||^2 = |\alpha_1|^2 \cdot ||v_1||^2 + \dots + |\alpha_n|^2 ||v_n||^2$$

פתרון:

פתרון שאלה 1 (המשך)

<u>שאלה 2:</u> אין קשר בין הסעיפים הבאים:

א. האם המטריצה הבאה לכסינה אוניטרית?

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

במידה וכן מצאו P אוניטרית ו D אלכסונית כך ש $P^*AP = D$. (10 נק)

ב. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית כך שקיים $k \in \mathbb{N}$ המקיים $A^k = I$, הוכיחו A או`ג. (13 נק)

<u>פתרון:</u>

פתרון שאלה 2 (המשך)

פתרון שאלה 2 (המשך)

פתרון שאלה 2 (המשך)

שאלה 3: יהי V ממ`פ ממימד סופי, ותהי $T : V \longrightarrow V$ הע`ל המקיימת $T = T^2$.

1. האם T בהכרח לכסינה? (5 נק)
2. הוכיחו $ImT = ker(I - T)$.(7 נק)
3. נניח כי בנוסף T נורמלית
   (א) הוכיחו כי T צמודה לעצמה (8 נק)
   (ב) הוכיחו כי קיים ת`מ $W \subseteq V$ המקיימים:

$$(\forall w \in W : \ T(w) = w) \quad \wedge \quad (\forall u \in W^{\perp} : \ T(u) = 0)$$

(11 נק)

פתרון:

פתרון שאלה 3 (המשך)

פתרון שאלה 3 (המשך)

פתרון שאלה 3 (המשך)

<u>שאלה 4:</u> תהי $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ המקיימת $rank(A-2I)=3$ $rankA=4,$. בנוסף נתון כי

$$A(A-2I)(A-5)^2=0$$

.

מהן צורות הז'ורדן האפשריות ל A?(10 נק)

<u>פתרון שאלה 4:</u>

פתרון שאלה 4 (המשך)

פתרון שאלה 4 (המשך)

שאלה 5: הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק' לסעיף)

א. תהי $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ המקיימת $|A| = 0$ וגם $A^2 \neq 0$ אזי A לכסינה.

ב. יהי V מ`ו. ותהיינה $<,>_1, <,>_2$ שתי מ`פ שונות על V. אזי קיים בסיס B ל V כך שהוא או`נ לפי שתי המכפלות הפנימיות.

ג. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ צל`ע. אזי, $A-(i+1)I$ הפיכה.

ד. יהי Vממ`פ מעל $\mathbb{R}$ ויהי $U$ ת`מ שלו. יהי $v \in V$ ונסמן ב p את ההיטל שלו על U. אזי,

$$v \in U^{\perp} \Longleftarrow ||v+p|| = ||v-p||$$

פתרון:

<u>פתרון שאלה 5 (המשך)</u>

פתרון שאלה 5 (המשך)

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___