אינטגרל לא אמיתי:

<u>שימושים נפוצים למבחני השוואה:</u>

מבחן השוואה ראשון:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} \text{ מתכנס } \iff \alpha > 1$$

מבחן השוואה שני:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} \text{ מתכנס } \iff \alpha < 1$$

מבחן דיריכלה:

תנאים: ① f מונו' יורדת לְ-0

② f' רציפה בְּ-$[a,\infty)$

③ $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ חסומה בְּ-$[a,\infty)$

<u>אזי:</u> $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)dx$ מתכנס.

דוגמה: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ מתכנס לכל $\alpha>0$ כאשר $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ ו-$g(x)=\sin x$

בס"ד

סדרי גודל:

- אם במבחן ההשוואה יוצא ∞ אז הפונקציה העליונה יותר "גדולה" מהפונקציה התחתונה.
- אם במבחן ההשוואה יוצא מספר ממשי $0<\alpha<\infty$ אז הפונקציות "חברות" ומתבדרות/מתכנסות יחדיו.
- אם במבחן ההשוואה יוצא 0 אז הפונקציה העליונה יותר "קטנה" מהפונקציה התחתונה.

הערות:

- אם כתוב "חשבו" כנראה שזהו אינטגרל לא מסוים אלא אם מבקשים למצוא קרוב לא חישוב מדויק.
- למבחני השוואה חייבים או חיוביות או שליליות (מוציאים מינוס החוצה).
- ניתן לעבור מאינטגרל לא אמיתי מסוג 2 לסוג 1 ע"י ההצבה

$$t=\frac{1}{x-a}$$

הנק' הבעייתית

חישוב (לפי הגדרה):

- $\int_2^{\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_2^t e^{-2x} = \lim_{t\to\infty} \frac{-e^{-2x}}{2}\Big|_2^t =$

$= 0-\left(\frac{-e^{-4}}{2}\right) = \frac{1}{2\cdot e^4}$

- $\int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^t\frac{2x}{(1+x^2)^2} =$

$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\int_2^t \frac{1}{u^2} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}\Big|_2^t = 0-\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

- $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx \underset{t=\arctan(x)}{=} \int_{\arctan(-\infty)}^{\arctan(\infty)} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{8} = 0$

- $\int_1^{\infty}\frac{-\cos(\frac{1}{x})}{x^2} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \int\cos(t)\,dt = \sin t = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\infty} = -\sin(1)$

- $\int_0^1\frac{-\cos(\frac{1}{x})}{x^2} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_0^1 =$ מתבדר

מבחן השוואה ראשון:

$$\bullet \int_1^\infty x^{-x}\,dx = \int_1^2 x^{-x} + \int_2^\infty x^{-x}$$

רגיל

$x^{-x} \le x^{-2}$ לכל $x\in[2,\infty]$ ומכיוון ש $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}$ מתכנס גם שלנו מתכנס.

$$\bullet \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x+5}\,dx \le \int_1^\infty \frac{x^2+2x^2+x^2}{x^4} = \int_1^\infty \frac{4}{x^2}$$ מתכנס

$$\bullet \int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5}\,dx \ge \int_1^\infty \frac{x^2}{x^3+4x^3+5x^3} = \frac{1}{10}\int_1^\infty \frac{1}{x}$$ מתבדר

$$\bullet \int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,dx \ge \int_2^\infty \sqrt{\frac{x^3}{x^2}} = \int_2^\infty \sqrt{x}$$ מתבדר

$$\bullet \int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4} \le \int_1^\infty \frac{5}{x^4}$$ מתכנס

$$\bullet \int_{10}^\infty \frac{3}{\sqrt{3x^2+2x-5}}\,dx \ge \int_{10}^\infty \frac{3}{\sqrt{9x^2}} = \int_{10}^\infty \frac{1}{x}$$ מתבדר

בס״ד

- $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ $\qquad \int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^2} \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ מתכנס

התכנסות בהחלט ⇐ התכנסות.

•• $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx = \int_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$

$= \int_1^\infty \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \ge \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+3x^2}+x} = \int_1^\infty \frac{1}{3x}$ מתבדר

•• $\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x}\,dx \ge \int_1^\infty \frac{\arctan(1)}{x} = \arctan(1)\int_1^\infty \frac{1}{x}$ מתבדר

•• $\int_1^\infty \frac{e^{\sin x}}{x}\,dx \ge \int_1^\infty \frac{e^{-1}}{x} = \frac{1}{e}\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x}$ מתבדר

•• $\int_3^\infty \frac{\sin x\cdot\ln x}{x^2\cdot\sqrt{x^2-4}} \le \int_3^\infty \frac{x}{x^2\cdot\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \le \int_3^\infty \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{\frac{7}{2}}}$ מתכנס

••• $\int_0^1 \frac{x^2(1+x)}{\sqrt[7]{(1-x^3)^4}} = -\frac{1}{3}\int_1^0 \frac{(1-t)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[7]{t^4}}\,dt \le \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3}{t^{\frac{4}{7}}} =$

$t=1-x^3$

$\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{4}{7}}}$ מתכנס

בס"ד

מבחן השוואה שני (גבולי):

- $\int_1^\infty \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}dx$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5} = \frac{1}{2}$

לכן חברים ומתבדרים יחדיו.

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sin x}dx$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2+\sin x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+\sin x} = 1$

מתכנס

סה"כ מתכנס.

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1$

סה"כ מתכנס

- $\int_2^\infty \frac{5x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{\sqrt{x^3-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3-1}} = 5$

סה"כ מתבדר

- $\int_1^\infty e^{-x}\cdot\ln x\, dx$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{e^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x\cdot x^2}{e^x} = 0$

לופ כמה פעמים

סה"כ מתכנס

- $\int_1^\infty e^{-x^2+3x+1}dx$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^{3x+1}}{e^{x^2}}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x+1}}{e^{x^2}} = 0$

סה"כ מתכנס

• • $\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{x}\,(x-2)}\,dx$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{x-1}{\sqrt{x}(x-2)}}{\frac{1}{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

סה״כ מתבדר

$\int_0^3 \frac{1}{t}$ אפשר להציב $t=x-2$ ולהגיע ל

• • $\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}\,dx$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-\cos x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} =$

לופ׳ $\frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cdot x}{\sin x} = 2$ ← סה״כ מתבדר

• • $\int_2^\infty \frac{x^2 \ln x}{x^4-x}\,dx$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 \ln x}{x^4-x}}{\frac{1}{x^{1.5}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{3.5}\ln x}{x^4-x} = 0$

סה״כ מתכנס

• $\int_2^\infty \frac{\arctan x}{1+x^3}\,dx$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{\arctan x}{1+x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 \arctan x}{1+x^3} = 2\pi$

סה״כ מתכנס

• $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)dx$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\to 0}}{\frac{1}{x^3}} = 1$ ← סה״כ מתכנס

• $\int_3^\infty \frac{1}{2+\cos x+\ln x}\,dx$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2+\cos x+\ln x}}{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2+\cos x+\ln x} = 1$

סה״כ מתבדר

• $\int_3^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+x^3}}\,dx$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^5+x^3}}}{\frac{1}{x^{1.5}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{2.5}}{\sqrt{x^5+x^3}} = 1$

סה״כ מתכנס

בס״ד

$$\dots\int_1^2 \frac{1}{\ln^2 x}\,dx \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\ln^2 x}}{\underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{\text{מתבדר}}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\ln^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{2\left(\frac{1}{x}\cdot \ln x\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{\frac{1}{x}} = 1$$

לופ $\frac{0}{0}$ לופ $\frac{0}{0}$ סה״כ מתבדר

$$\dots\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx = \overset{\mathrm{I}}{\int_0^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{x\sqrt{1-x}} + \overset{\mathrm{II}}{\int_{\frac{1}{2}}^1} \frac{1}{x\sqrt{1-x}} + \text{\}}$$

I $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1$ ← לכן מתבדר

II $\quad \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$ ← לכן מתכנס

$$\dots\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}}{\underbrace{\frac{1}{x^{3/4}}}_{\text{מתכנס}}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{4}x^{3/4}} = \lim_{x\to 0} 4\cdot x^{\frac{1}{4}} = 0$$ ← סה״כ מתכנס

$$\dots\int_2^\infty \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^{11}} + 3\ln x\cdot x^2}{\sqrt{x^8 + \sqrt{x^{15}}}}\,dx \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^{3\frac{2}{3}} + 3\ln x\cdot x^2}{(x^8 + x^{7.5})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

לכן לפי השוואה עם $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ יצא לנו מספר ממשי וחיובי ש- $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ מתבדר

סה״כ אז גם יתבדר.