חזרה למבחן

שאלה

כל חבורה מסדר 250 היא פתירה?

תשובה

$$|G| = 5^3 \cdot 2$$

לפי משפט סילוא 1 קיימת ת"ח 5-סילוא והיא מסדר 5^3, נסמנה בH_5.

$$[G : H_5] = 2$$

$$\Downarrow$$

$$H_5 \lhd G$$

<u>משפט 1</u>: כל חבורת p היא פתירה.

$\Leftarrow$ H_5 פתירה.
גם $G/H_5 \equiv \mathbb{Z}_2$ והיא פתירה.

<u>משפט 2</u>: $G \lhd N$, אזי G פתירה.

$\Leftrightarrow$ G/N פתירה וגם N פתירה.
לכן גם G פתירה.

פתרון חלופי

ניתן להשתמש בחבורה $Z(G)$ ובסדרה הנורמלית $G \rhd H_5 \rhd Z(G) \rhd \{e\}$ ולהשתמש במשפטים:

א. $Z(G) \neq \{e\}$ עבור חבורת p

ב. $G/Z(G)$ אינה ציקלית לא טריוויאלית.

ג. חבורה מסדר p^2 היא אבלית.

אם ${}^{G}/_{Z(G)}$ היא ציקלית אזי קיים איבר מהצורה $aZ(G)$, כך ש$\langle aZ(G)\rangle = {}^{G}/_{Z(G)}$.
כלומר כל איבר בחבורה הוא מהצורה $(aZ(G))^t = a^t Z(G)$.
זה אומר שכל איבר בG הוא מהצורה $a^k \cdot z \in a^k Z(G)$ כאשר $z \in Z(G), k \in \mathbb{Z}$.
נגיע לסתירה על ידי כך שנראה שG היא אבלית:

$$\left(a^{k_1} z_1\right)\left(a^{k_2} z_2\right) = ...$$

z_1 במרכז והוא מתחלף עם a^{k_2}, ולכן זה שווה ל

$$...a^{k_1} a^{k_2} z_1 z_2 = a^{k_1+k_2} z_1 z_2 = a^{k_2} a^{k_1} z_1 z_2 = a^{k_2} a^{k_1} z_2 z_1 =$$

$$= a^{k_2} z_2 a^{k_1} z_1 = \left(a^{k_2} z_2\right)\left(a^{k_1} z_1\right)$$

קיבלנו שG היא אבלית. $\Leftarrow Z(G) = G \Leftarrow {}^{G}/_{Z(G)}$ ציקלית טריוויאלית - סתירה.

שאלה

האם $\mathbb{R}^*$ נוצרת סופית?

תשובה

לא

טענה כל חבורה אבלית נוצרת סופית היא בת מניה.

נניח בשלילה ש$\mathbb{R}^* = \langle a_1, ...a_k\rangle$. מכיוון ש$\mathbb{R}^*$ אבלית זה אומר:

$$\left\{ a_1^{t_1} \cdots a_k^{t_k} \middle| \begin{array}{c} t_i \in \mathbb{Z} \\ \forall 1 \le i \le k \end{array} \right\}$$

ואז

$$\left| \left\{ a_1^{t_1} \cdots a_k^{t_k} \middle| \begin{array}{c} t_i \in \mathbb{Z} \\ \forall 1 \le i \le k \end{array} \right\} \right| \le \left| \left\{ (t_1, ...t_k) \middle| \begin{array}{c} t_i \in \mathbb{Z} \\ 1 \le i \le k \end{array} \right\} \right| = \left|\mathbb{Z}^k\right| = \aleph_0$$

(בדידה: אם קיימת פונקציה על $f: A \to B \Leftarrow |B| \le |A|$)

שאלה

האם קיים אפימורפיזם

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{33} \times \mathbb{Z}_7$$

תשובה

לפי משפט איזו 1

$$\mathbb{Z}/\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{33}\times\mathbb{Z}_7$$

קיים m כך ש$\ker\varphi = m\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/\ker\varphi = \mathbb{Z}/\mathrm{m}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$$

$\mathbb{Z}_m$ ציקלית, ואם $\gcd(m,n)=1$ אזי $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{m\times n}$, ולכן $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{33}\cong\mathbb{Z}_{10\cdot 33}$, $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{33}\times\mathbb{Z}_7=\mathbb{Z}_{10\cdot 33\cdot 77}$.

נוכיח אפימורפיזם על ידי כך שנוכיח שקיימת הרכבה של כמה פונקציות שאנו יודעים שהן קיימות:

$$\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{33}\times\mathbb{Z}_7\cong\mathbb{Z}_{10\cdot 33\cdot 7}$$

$$\mathbb{Z}\xrightarrow[surjective]{\text{mod } 7}\mathbb{Z}_{m=10\cdot 33\cdot 7}\xrightarrow[surjective]{\sim}\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{33}\times\mathbb{Z}_7$$

לכן קיים אפימורפיזם.

שאלה

אם קיימם מונומורפיזם $\varphi: A\to B$, האם בהכרח קיים אפימורפיזם $\psi: B\to A$?

תשובה

קיים $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ (שכן $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$). האם קיים אפימורפיזם $\varphi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$?

נניח בשלילה שקיים כזה, אפי ψ.

קיים $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ כך ש $\frac{m}{n}=1$:

$$1=\psi\left(\frac{m}{n}\right)=\psi\left(\frac{m}{2n}+\frac{m}{2n}\right)=2\psi\left(\frac{m}{2n}\right)\Rightarrow\psi\left(\frac{m}{2n}\right)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$$

סתירה לכך ש$\psi(\mathbb{Q})=\mathbb{Z}$.

שאלה

האם קיים מונומורפיזם

$$\varphi:\mathbb{Z}_{10}\to S_{10}$$

תשובה

לפי איזו 1:

$$\mathbb{Z}_{10}/_{\ker\varphi} \cong \mathrm{Im}\varphi \subseteq S_{10}$$

האם קיימת ת"ח ציקלית מסדר 10 בS_{10}? כן!

$$o\left((1,...10)\right) = 10$$

$$\varphi\left(1\right) = (1,...10)$$

תרגיל

הוכיחו שכל חבורה אבלית מסדר לא ראשוני אינה פשוטה.

פתרון

נניח $|G| = m$. קיים ראשוני p שמחלק את m. $p \neq m$, ולפי משפט קושי קיים $x \in G$ מסדר p. $|\langle x\rangle| = p$, ו$\langle x\rangle \lhd G$ כי כל ת"ח של אבלית היא נורמלית.

$$\{e\} \neq \langle x\rangle \trianglelefteq G$$

פתרון בלי קושי

ניקח $G \ni x \neq e$, ונסתכל על $\langle x\rangle$.

- אם $\{e\} \neq \langle x\rangle \neq G$ אז סיימנו כי $\{e\} \neq \langle x\rangle \lhd G$.
- אם $\langle x\rangle = G$ אזי G ציקלית $\Leftarrow$ $G \cong \mathbb{Z}_m$. קיים p ראשוני שמחלק את m, אזי $\{e\} \neq p\mathbb{Z}_m \lhd G$

תרגיל

מיינו את כל החבורות האבליות מסדר 100:

פתרון

$$100 = 5^2 \cdot 2^2$$

לפי החלק הראשון של המיון, אם G אבלית מסדר 100, אזי

$$G \cong H_5 \times H_2$$

כאשר H_5 תת-חבורת 5 סילוא של G ו-H_2 תת-חבורת 2 סילוא של G.

$$H_5 \cong \mathbb{Z} \vee \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$$

$$H_2 \cong \mathbb{Z}_4 \vee \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

לכן

$$G \cong \overbrace{\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_4}^{\cong \mathbb{Z}_{100}} \vee ...$$

בודקים חוסר איזומורפיזם של המקרים ע"י $\exp$.

הערה

אם לא נתון שהחבורה אבלית וכתוב למיין:

א. אם הסדר הוא $2p \Leftarrow I_2(p)$ או $\mathbb{Z}_{2p}$

ב. אם $p^2 \Leftarrow$ החבורה אבלית.

ג. אם pq וגם $p < q$ וגם $q \not\equiv 1 \pmod{p} \Leftarrow$ החבורה ציקלית $\mathbb{Z}_{pq}$

ד. אם 8 $\Leftarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_8$, $I_2(4)$, Q_4:

דרך ההוכחה:

א. מראים שכל חבורה נוצרת על ידי שני איברים לכל היותר, חוץ מ-$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, אחד מסדר 2 ואחד מסדר 4

ב. בודקים את היחס בין היוצרים.

אם קיים איבר מסדר 8, אז סיימנו.
אם קיים איבר x מסדר 4, אז ניקח $y \in G \backslash \langle x \rangle$. אם y מסדר 2, אז סיימנו כי $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$.

$$|\langle x \rangle \langle y \rangle| = \frac{|\langle x \rangle| |\langle y \rangle|}{|\langle x \rangle \cap \langle y \rangle|} = \frac{4 \cdot 2}{1} = 8$$

בשיקולים דומים מראים שבהרכב יש איבר מסדר 2 שלא שייך ל-$\langle x \rangle$.

ה. אם 6 $\Leftarrow \mathbb{Z}_6, S_3 \cong I_2(3)$.