אלגברה לינארית 2 (88113) – בחינת סיום (מועד א׳)

מרצים: פרופ׳ רון עדין, פרופ׳ בוריס קוניאבסקי.
מתרגלים: עופר בוסאני, שירה גילת, עדי לוגסי, תמר נחשוני.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
*בבחינה שני פרקים. יש לענות על **כל השאלות** בפרק א׳ ועל **שתים מתוך שלוש השאלות** בפרק ב׳.*
הניקוד על השאלות רשום בנפרד בכל פרק. נא לציין במפורש על אילו שאלות עניתם בפרק ב׳.
נא לענות על כל שאלה בעמוד נפרד. ניתן לסמן עמודים כ״טיוטה״.
נא להסביר ולנמק בבירור את כל התשובות.

בהצלחה!

פרק א׳

יש לענות על שתי השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 20 נקודות.

1. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד n $(n \geq 1)$, ויהי $W = V \oplus V$ הסכום הישר של שני עותקים של V.
   א. נגדיר
   $$\langle (u_1,u_2),(v_1,v_2)\rangle_W := \langle u_1,v_1\rangle + \langle u_2,v_2\rangle \qquad (\forall u_1,u_2,v_1,v_2 \in V)$$
   הוכיחו ש- $\langle \cdot,\cdot\rangle_W$ מכפלה פנימית על T.
   ב. יהיו $W_1 = \{(v,0) \mid v \in V\}$, $W_2 = \{(v,v) \mid v \in V\}$ תת-מרחבים של W. מצאו את שני המשלימים הניצבים $W_3 := W_1^{\perp}$, $W_4 := W_2^{\perp}$.
   ג. יהי $E = \{e_1,\ldots,e_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V. מצאו בסיסים אורתונורמליים עבור W_1, W_2, W_3, W_4.
   ד. יהי $v \in V$, ויהי $w = (3v,4v) \in W$. מצאו את ההטלה הניצבת של w על כל אחד מ- W_i $(i = 1,\ldots,4)$.

2. יהיו $V = \mathbb{C}^3$ (עם המכפלה הסקלרית הרגילה, מעל $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), $W = V \oplus V$ (עם המכפלה הפנימית שהוגדרה בשאלה 1א). נגדיר אופרטור לינארי $T: W \to W$ ע״י
   $$T(v_1,v_2) := (iv_2, v_1) \qquad (\forall v_1,v_2 \in V)$$
   א. בחרו בסיס אורתונורמלי עבור W, ורשמו את המטריצה המייצגת את T בבסיס זה.
   ב. מצאו את האופרטור הצמוד T^* (רשמו נוסחה מפורשת עבור $T^*(v_1,v_2)$).
   ג. האם T נורמלי? הרמיטי (צמוד לעצמו)? אנטי-הרמיטי (אנטי-צמוד לעצמו)? אוניטרי?
   ד. מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של T.
   ה. האם T ניתן לשילוש? האם הוא ניתן ללכסון?
   ו. האם T ניתן לשילוש אוניטרי? האם הוא ניתן ללכסון אוניטרי?

פרק ב'

יש לענות על שתים מתוך שלוש השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 30 נקודות.

3. תהיינה A, B מטריצות מסדר 3×3 מעל $\mathbb{C}$. נתון שהמטריצות אינן הפיכות ואינן ניתנות ללכסון (מעל $\mathbb{C}$). הוכיחו, או תנו דוגמא נגדית, לכל אחד מהסעיפים הבאים.
   א. אם ל-A ול-B אותו פולינום אופייני וגם $\operatorname{tr}(A)=0$, אז A, B דומות.
   ב. אם ל-A ול-B אותו פולינום אופייני וגם $\operatorname{tr}(A)\neq 0$, אז A, B דומות.
   ג. אם הפולינום האופייני של A שווה לפולינום המינימלי של A, וגם הפולינום האופייני של B שווה לפולינום המינימלי של B, אז A, B דומות.

4. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ פרמטרים. נגדיר אופרטור $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י
$$T(x,y,z)=(5x,ax+5y,y+bz)\qquad (\forall x,y,z\in\mathbb{R})$$
   א. רשמו את המטריצה A המייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.
   ב. עבור אילו ערכים של a,b האופרטור T ניתן ללכסון?
   ג. עבור כל ערך של הזוג (a,b) שעבורו T ניתן ללכסון, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש-$P^{-1}AP=D$.

5. יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$, מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ ממעלה 2 לכל היותר.
   א. נגדיר
$$\langle f,g\rangle := f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(-1)g(-1)\qquad (\forall f,g\in V)$$
   הוכיחו שזו מכפלה פנימית על V.
   ב. מצאו בסיס אורתונורמלי של V ביחס למכפלה פנימית זו.
   ג. מצאו את ההטלה הניצבת (ביחס למכפלה הפנימית הנ"ל) של הווקטור $h=1+x+x^2\in V$ על תת-המרחב W של V המורכב מהפולינומים הקבועים.
   ד. האם ההגדרה בסעיף א' נותנת מכפלה פנימית גם על מרחב הפולינומים ממעלה 3 לכל היותר מעל $\mathbb{R}$? נמקו.