

תרגיל בית 8 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. תהינה K/F ו- E/K הרחבות שדות.

א. הוכיחו או הפריכו: אם E/F הרחבה נורמלית, אז E/K הרחבה נורמלית.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם E/F הרחבה נורמלית, אז K/F הרחבה נורמלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם K/F הרחבה נורמלית ו- E/K הרחבה נורמלית, אז E/F הרחבה נורמלית. רמז: ראינו משהו בתרגילי הבית הקודמים.

שאלה 2. תנו דוגמה להרחבת גלואה E/\mathbb{Q} כך ש- $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

שאלה 3. היעזרו בתרגיל שפתרנו בתרגול לגבי חישוב פולינומים מינימליים לחישוב הפולינומים הבאים:

א. הפולינום המינימלי של $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \sqrt{6}$ מעל \mathbb{Q} .

ב. הפולינום המינימלי של $\rho_5 + \rho_5^4$ מעל \mathbb{Q} , כש- ρ_5 הוא שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 5.

שאלה 4. יהי $0 < a \in \mathbb{Q}$ כך ש- $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. נסמן $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{a}, i)$.

א. הוכיחו כי K/\mathbb{Q} היא הרחבת גלואה.

ב. הוכיחו כי $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong D_4$.

בהצלחה!