מבנים אלגבריים

פתרון תרגיל בית 2

22 בנובמבר 2012

3.1.14 תהי G חבורה עם $a, b \in G$. הוכיחו: למשוואה $xax = b$ יש פתרון אם ורק אם ab הוא ריבוע (כלומר, מהצורה y^2) ב־G.

פתרון נתחיל במשוואה $xax = b$. אנחנו עוסקים כאן בחבורה, ולכן ניתן להכפיל באיבר את שני אגפי המשוואה בלי לשנות את קבוצת הפתרונות שלה.[1] אם כן, נכפיל את המשוואה ב־a משמאל, ונקבל $axax = ab$. נרשום משוואה זו בדרך אחרת, $(ax)^2 = ab$.

כעת, אם קיים x פתרון למשוואה, אז $y = ax$ הוא שורש ריבועי של ab. מצד שני, אם קיים y שורש ריבועי של ab, אז מתקיים $x = a^{-1}y$ הוא פתרון. $\square$

3.1.16 איברים a, b בחבורה מקיימים $ab^2a^{-1} = b^3$, $a^2 = 1$. הוכח ש־$b^5 = 1$.

פתרון נתונות לנו הנוסחאות הבאות:

$$ab^2a^{-1} = b^3 \tag{1}$$
$$a^2 = 1 \tag{2}$$

נתחיל בהכפלת (2) ב־a^{-1} מצד ימין, ונקבל

$$a = a^{-1} \tag{3}$$

אנו נשתמש להלן בזהות זו באופן חופשי. כעת נתחיל לפתח את (1). נציג להלן שתי דרכים לפתח את הדרוש.

[1] בחבורה־למחצה הכפלת שני האגפים באיבר עלולה להרחיב את קבוצת הפתרונות (הכפלה באפס במשוואות ממשיות, לדוגמא). אבל בחבורה ניתן להכפיל שוב בהופכי לו, ולקבל את המשוואה המקורית. לכן אין הרחבה של קבוצת הפתרונות בחבורה. כמובן, כל עוד הפעולה איננה קומוטטיבית, יש להקפיד על כפל באותו הצד.

דרך א:

$$\begin{aligned}
& & ab^2a &= b^3 && (4)\\
a\cdot(4)\cdot a/ & & b^2 &= ab^3a && (5)\\
(4)\cdot(5)/ & & b^5=b^2\cdot b^3 &= ab^3a\cdot ab^2a=ab^5a && (6)\\
a\cdot(6)/ & & ab^5 &= b^5a && (7)\\
(5)^2/ & & b^4 &= ab^3a\cdot ab^3a=ab^6a && (8)\\
(7)\cdot ba/ & & b^5aba &= ab^6a\overset{(8)}{=}b^4 && (9)\\
ab^{-4}\cdot(9)\cdot a/ & & abab &= ab^{-4}b^4a=1 && (10)\\
a\cdot(10)/ & & bab &= a && (11)\\
(4)\cdot b^2/ & & ab^2ab^2 &= b^5 && (12)\\
(12)/ & & b^5 &= ab^2ab^2=ab\left(bab\right)b\overset{(11)}{=}abab\overset{(10)}{=}1 && (13)
\end{aligned}$$

קיבלנו לבסוף $b^5=1$, כמבוקש.
דרך ב:[2]

$$b^6=b^3\cdot b^3\overset{(4)}{=}\left(ab^2a\right)\left(ab^2a\right)=ab^2a^2b^2a\overset{(2)}{=}ab^2\cdot b^2a=ab^4a$$

נכפיל ב־aמימין ומשמאל, ונקבל

$$b^4=ab^6a=ab^2b^2b^2a\overset{(2)}{=}ab^2a\cdot ab^2a\cdot ab^2a\overset{(4)}{=}b^3\cdot b^3\cdot b^3=b^9$$

כעת נכפיל את שני האגפים ב־b^{-4}, ונקבל $b^5=1$, כמבוקש. $\square$

3.3.21 חשב את המכפלות הבאות:

1. $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&3&1\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix}1&2&\dots&n-1&n\\2&3&\dots&n&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&\dots&m&m+1&\dots&n\\2&3&\dots&1&m+1&\dots&n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&\dots&n-1&n\\2&3&\dots&n&1\end{pmatrix}$

פתרון

1. לשם החישוב נרשום את התמורה בטבלה בת שלוש שורות:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\\5&4&3&1&2\end{pmatrix}$$

נחזור לרישום הסטנדרטי על ידי מחיקת השורה האמצעית, ונקבל $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&1&2\end{pmatrix}$.

[2] את דרך ב' ראיתי בפתרונות הסטודנטים. היא דרך ברורה יחסית, ולדעתי היא יפה מהדרך שהבאתי בדרך א'. כמובן, בפתרון של תרגיל אריתמטי תמיד ניתן למצוא דרך ארוכה. [ח.ש.ר.]

2. באופן דומה, נעבוד בטבלה בת 4 שורות. התמורה המורכבת היא האמצעית, ולכן נסדר את הטבלה על פיה.

$$\begin{pmatrix} n & 1 & \dots & m-2 & m-1 & m & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & m-1 & m & m+1 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & m & 1 & m+1 & \dots & n-1 & n \\ 3 & 4 & \dots & m+1 & 2 & m+2 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

נסדר מחדש את עמודות הטבלה לפי השורה העליונה, כמקובל, ונמחק את השורות האמצעיות. מתקבלת התמורה

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & m-2 & m-1 & m & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 4 & \dots & m+1 & 2 & m+2 & \dots & n & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.4.4 הראו שהחבורה הסימטרית S_n אינה אבלית, אלא במקרים $n=1,2$.

פתרון נניח $n \geq 3$. נביט בתמורות הבאות: σ מחליפה בין 1 ובין 2, ומשאירה את כל השאר במקומם. τ מחליפה בין 1 לבין 3, ומשאירה את כל השאר במקומם. במקרה זה, $\sigma \circ \tau$ מעבירה את 1 ל־3. לעומת זאת, $\tau \circ \sigma$ מעבירה את 1 ל־2. אם כן, שתי המכפלות האלה שונות, והחבורה איננה אבלית.

במקרים $n=1,2$, ניתן לבדוק ידנית את כל האפשרויות. $\square$

3.4.6 בחבורה מתקיים $x^2=1$ לכל איבר. הוכיחו שהחבורה אבלית.

פתרון יהיו x,y בחבורה. אזי $xyxy=(xy)^2=1$. נכפיל משוואה זו ב־x משמאל וב־y מימין. לצורכי רישום אנו נהפוך אגפים, ונקבל

$$xy=x\left(1\right)y=x\left(xyxy\right)y=x^2yxy^2=yx$$

3.4.7 הוכיחו: $(xy)^2=x^2y^2$ לכל x,y אם ורק אם החבורה אבלית.

פתרון נפתח את הסוגריים: $xyxy=x^2y^2$. נכפיל ב־x^{-1} משמאל וב־y^{-1} מימין, ונקבל $x^{-1}\left(xyxy\right)y^{-1}=x^{-1}\left(x^2y^2\right)y^{-1}$. בפתיחת סוגריים נקבל $yx=xy$. $\square$

3.6.4 אם $H \leq G$, $N \leq H$, אז $N \leq G$.

פתרון N תת־קבוצה של G, כי הכלה היא טרנזיטיבית ו־$N \subseteq H \subseteq G$. היא חבורה בפני עצמה, ולפיכך לא ריקה וסגורה לכפל ולהיפוך. אם כן, N מקיימת את כל התנאים. $\square$

3.6.6 אם G חבורה סופית ו־$H \subseteq G$ סגורה לכפל, אז $H \leq G$.

פתרון אנו נניח כי H לא ריקה.[3] בהנחה זו, כבר נתון כי H היא תת־קבוצה לא ריקה וסגורה לכפל. נותר רק להראות כי היא סגורה להיפוך. יהי $g \in H$ נתון. נביט

[3]אחרת כמובן התוצאה איננה נכונה.

בקבוצת החזקות הסופיות של g, $\{h \in G | \exists n, h = g^n\}$. קבוצה זו מוכלת כמובן ב־H, כי זהו כפל סופי של איברים ב־H. בנוסף, קבוצה זו סופית, כי היא תת־קבוצה של קבוצה סופית. לכן קיימים $n_1 \neq n_2$ כך ש־$g^{n_2} = g^{n_1}$, לפי עקרון שובך היונים. נסמן $n = |n_1 - n_2| \neq 0$. אזי $g^n = 1$. נכפיל משוואה זו ב־g^{-1} בצד ימין, ונקבל $g^{-1} = g^{n-1}$. אם כן, ההופכי של g נמצא בקבוצה הנ"ל, ובפרט ב־H. $\square$

3.6.8 תהיינה H, G_1, G_2 תת־חבורות של G. אם $H \subseteq G_1 \cup G_2$ אז $H \subseteq G_1$ או $H \subseteq G_2$.

פתרון נניח בשלילה כי $H \nsubseteq G_1$ וגם $H \nsubseteq G_2$. אם כן קיימים $g_1, g_2 \in H$ כך ש־$g_1 \in G_1 \setminus G_2$ וכן $g_2 \in G_2 \setminus G_1$. H חבורה, ולכן $g_1 g_2 \in H$. נבדוק האם $g_1 g_2 \in G_1$. אם כן, נכפיל איבר זה ב־$g_1^{-1} \in G_1$ משמאל, ונקבל ש־$g_2 \in G_1$, ובסתירה לנתון. מצאנו כאן כי $g_1 g_2 \notin G_1$. באופן דומה מראים כי $g_1 g_2 \notin G_2$. לסיכום $H \supseteq G_1 \cup G_2 \not\ni g_1 g_2$, ובסתירה ל־$g_1 g_2 \in H$. $\square$