תרגיל בית 1

שאלה 1:

קבע לכל אחת מהקבוצות והפעולות הבאות קבע האם היא אגודה/מונאיד/חבורה. במידה שקיימת יחידה שמאלית/ימנית/דו"צ מצא אותה. במידה שמדובר בחבורה מצא את ההופכי של איבר נתון.

1. קבוצת שורשי היחידה מסדר n, כלומר הקבוצה $X=\{a\in\mathbb{C}\,|\,a^n=1\}$ עם הפעולה של כפל רגיל של מספרים מרוכבים.
2. קבוצת המטריצות הריבועיות מסדר $n>1$, כלומר $\mathbb{F}^{n\times n}$ עם פעולת כפל מטריצות
3. יהא $\mathbb{F}$ שדה. אזי הקבוצה $G=\mathbb{F}^*=\mathbb{F}\backslash\{0\}$ עם הכפל של השדה.
4. המטריצות $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\,|\,0<a\in\mathbb{R},\,b\in\mathbb{R}\right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.
5. השלמים $G=\mathbb{N}$ עם פעולה $a*b=a^b$
6. תת קבוצה של הפולינומים $X=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]\,|p(1)=0\}$ עם חיבור פולינום רגיל.
7. הטבעיים $G=\mathbb{N}$ עם פעולה מקסימום $a*b=\max\{a,b\}$
8. קטעים פתוחים בקבוצת הממשיים
$$G=\{\,(a,b)\subseteq\mathbb{R}\,|\,a<b,\;a.b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\,\}\cup\{\emptyset\}$$
עם פעולת חיתוך קבוצות.
9. תת קבוצה של המטריצות $G=\{\begin{pmatrix} 0 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ עם כפל מטריצות רגיל.
10. תת קבוצה של מטריצות משולשיות $G=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

שאלה 2:

הוכיחו כי $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},*)$ היא חבורה אבלית כאשר $a*b=a+b+ab$.
(שימו לב שפה המוגדרות/סגירות של הפעולה היא לא מיידית, ויש להוכיח אותה).

שאלה 3:

הכרה של עוד חבורות:

(א) הקווטרניונים: נגדיר

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

(ב) המרוכבים: נגדיר

$$G=\left\{A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}:\ det(A)=a^2+b^2\neq 0\right\}$$

הוכיחו כי קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

<u>שאלה 4:</u>

הוכיחו שחבורה G היא אבלית אם ורק אם לכל $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^2=a^2b^2$.

<u>שאלה 5:</u> מצאו את חבורת האיברים ההפיכים של $\mathbb{Z}_6$ ושל $\mathbb{Z}_7$.

<u>שאלה 6:</u> הצג את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

(א) $a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ב) $b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

<u>שאלה 7:</u> חשבו: $a^2\ ,b^2, bab^{-1}, ab$ (עבור a,b הנ"ל)

<u>שאלה 8:</u>

תהא $\sigma\in S_n$. ותהא $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכח כי

(א) $\sigma^{-1}=\tau_1^{-1}\cdots\tau_m^{-1}$

(ב) $\sigma^k=\tau_1^k\cdots\tau_m^k$ לכל k טבעי.

(ג) הראה שהשיוויונות לעיל לא מתקיימים בהכרח בחבורה כללית. כלומר, תן דוגמאות המקיימות

i. $g^{-1}\neq x_1^{-1}\cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k\neq x_1^k\cdots x_m^k$

(ד) מצא את התנאים ששיוויונות אלו כן יתקיימו, כלומר שכן מתקיים

i. $g^{-1}=x_1^{-1}\cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k=x_1^k\cdots x_m^k$

<u>שאלה 9:</u> פתרו את המערכות הבאות:

(א) $(135)x=(12)(245)$

(ב) $(153)x(42)=(13)(245)$

<u>שאלה 10:</u> יהיו G_1,G_2 חבורות הוכח/הפרך:

(א) אם $G_1\times G_2$ ציקלית אז גם G_2 וגם G_1 ציקלית.

(ב) אם G_1 וגם G_2ציקליות אז $G_1\times G_2$ ציקלית.

שאלה 11: הוכח כי החבורות הבאות אינן ציקליות

א) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

ב) $\mathbb{Q}$

שאלה 12:

כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2\times n$. התוכנה תדפיס כפלט את התמורה כמכפלת מחזורים זרים. הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותדפיס את מכפלתן כמכפלת מחזורים זרים.