

מבנים אלגבריים (89-214)

מרצה: ד"ר מיכאל משה שיין

תשע"ד סמסטר א'

מבחן מסכם, מועד א'

יש לענות על כל השאלות. בפתרונותיך לשלוש השאלות הראשונות יש לנמק באופן מלא את כל הטענות שלך. בשאלות 4-7, אין צורך לנמק את התשובות. בשאלות אלה, תשובה נכונה תקבל 10 נקודות, תשובה שגויה תקבל 0 נקודות, ותשובה ריקה תזכה במספר נקודות שצוין בשאלה. כל חומר עזר אסור. משך הבחינה: שעתיים וחצי. בהצלחה!

1. תהי  $G$  חבורה כך שלכל  $x, y \in G$  מתקיים  $x^{5774}y^{5774} = (xy)^{5774}$ . נגדיר שתי תת־קבוצות

$$H = \{g^{5774} \mid g \in G\}$$
$$K = \{g \in G \mid g^{5774} = e\}$$

כאשר  $e$  הינו איבר היחידה של  $G$ .

(א) (10 נק') הוכח כי  $H$  ו- $K$  שתיהן תת־חבורות נורמליות של  $G$ .

(ב) (15 נק') הוכח כי  $G/K \simeq H$ .

2. (20 נק') תהי  $G$  חבורה, ותהי  $H \trianglelefteq G$  תת־חבורה נורמלית מאינדקס 7 (תזכורת: זה אומר כי  $\frac{|G|}{|H|} = 7$ ). יהי  $g \in G$  כך ש- $g \notin H$ . הוכח שהאיברים  $g, g^2, g^3, \dots, g^7$  כולם שייכים לקוסטים שונים של  $H$ -ב- $G$ .

3. (20 נק') תהי  $G$  חבורה סופית. נניח שיש לה רק שתי מחלקות צמידות. הוכח כי  $|G| = 2$ . (רמז: יהי  $g \in G$  איבר לא טריוויאלי. מהו הגודל של  $C_G(g)$ ?)

4. (3 נק' לתשובה ריקה) מבין שלושת החבורות  $S_4, D_{12}, \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ :

(א) כולן איזומורפיות זו לזו.

(ב) שתיים מהן איזומורפיות זו לזו ולא לשלישית.

(ג) אין שום איזומורפיזמים בין החבורות האלה.

5. (3 נק' לתשובה ריקה) תהי  $G$  חבורה כך שההעתקה  $f : G \rightarrow G$  המוגדרת על ידי  $f(g) = g^6$  הינה הומומורפיזם. האם ההעתקה  $\varphi : G \rightarrow G$  המוגדרת על ידי  $\varphi(g) = g^8$  בהכרח הומומורפיזם?

(א) כן, תמיד.

(ב) כן אם  $G$  אבלית, אך אם  $G$  אינה אבלית יתכן שלא.

(ג) יתכן שלא, אפילו אם  $G$  אבלית.

6. (3 נק' לתשובה ריקה) תהי  $G$  חבורה,  $H \subseteq G$  תת־חבורה. יהיו  $x, y, z \in G$  כך ש־ $xyz = e$ . בחרו את התשובה הכי נכונה:

(א) אם  $y \in H$ , אזי  $x \in H$  וגם  $z \in H$ .

(ב) אם  $x \in H$  וגם  $z \in H$ , אזי  $y \in H$ .

(ג) שתי הטענות האלה נכונות.

(ד) אף אחת מן הטענות האלה אינה נכונה.

7. (2 נק' לתשובה ריקה) יהי  $\mathbb{F}_n$  השדה הסופי בעל  $n$  איברים. איזה מן השדות הבאים מכיל איבר  $x$  כך ש־ $x^4 + 1 = 0$ ?

(א)  $\mathbb{F}_2$

(ב)  $\mathbb{F}_9$

(ג)  $\mathbb{F}_7$

(ד)  $\mathbb{F}_2$  וגם  $\mathbb{F}_9$

(ה)  $\mathbb{F}_2$  וגם  $\mathbb{F}_7$

(ו) כל שלושת השדות האלה.