פתרון מועד ב' בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

קורס מס' 83114 תשע"ח, סמסטר ב'

שאלה 1. עבור טור הפונקציות: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$:

א. מצא תחום התכנסות בהחלט, בתנאי ובמידה שווה (10 נק').

ב. הצג במפורש (לא כטור) את הפונקציה: $g(x)=\left(x^2 f(x)\right)'$ בתחום ההתכנסות שמצאת (15 נק').

פתרון:

א. נחשב את רדיוס ההתכנסות של הטור עפ"י נוסחת קושי-הדמר: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+2}}=1\Rightarrow R=1$.
נבדוק התכנסות בקצוות: בנקודה $x=1$ הטור "חבר" של הטור ההרמוני שמתבדר, ובנקודה $x=-1$ מתקבל טור לייבניץ המתכנס בתנאי. לכן בסה"כ הטור מתכנס בקטע $[-1,1)$, בהחלט בקטע $(-1,1)$, ובמ"ש בכל קטע סגור $[-1,b], b<1$.

ב. בתוך תחום ההתכנסות ההתכנסות היא במ"ש לכן ניתן להחליף שם את סדר הטור והאינטגרל ולקבל:

$$g(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

שאלה 2.

א. הראה כי המשוואה $x^2z^3+y^2z=3-xy$ מגדירה פונקציה $z(x,y)$ בסביבת הנק' $(1,1,1)$ (10 נק').

ב. תאר את $z(x,y)$ מסעיף א' בקירוב מסדר ראשון כפולינום, כלומר מהצורה: $C+Ax+By$ (15 נק').

פתרון:

א. נגדיר את הפונקציה: $F(x,y,z)=xy+x^2z^3+y^2z-3\in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ ונשים לב כי: $F(1,1,1)=0$,
כלומר הנק' $(1,1,1)$ מקיימת את המשוואה. עפ"י משפט הפונקציות הסתומות נותר להראות כי:
$F_z(1,1,1)\neq 0$ ואכן: $F_z(1,1,1)=3x^2z^2+y^2\Big|_{(1,1,1)}=4\neq 0$.

ב. ניעזר בפיתוח טיילור. נרשום:

$$z(1,1)=1,$$

$$z_x(x,y)=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{y+2xz^3}{3x^2z^2+y^2}\Rightarrow z_x(1,1)=-\frac{3}{4}$$

$$z_y(x,y)=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{x+2yz}{3x^2z^2+y^2}\Rightarrow z_y(1,1)=-\frac{3}{4}$$

מכאן ש: $z(x,y)\approx 1-\frac{3}{4}(x-1)-\frac{3}{4}(y-1)=\frac{5}{2}-\frac{3x}{4}-\frac{3y}{4}$.

שאלה 3. על ספירת היחידה שמרכזה בראשית מוגדרת פונקצית חום: $T(x,y,z)=80+50(x+z)$
מצא את הנקודה הקרה ביותר והחמה ביותר על החיתוך של המישור $x+y+z=1$ עם הספירה (25 נק').

פתרון:

למציאת נקודות קיצון על החיתוך נכתוב את פונקצית לגרנז' עם שני אילוצים:

$$L(x,y,z)=80+50(x+z)+\lambda_1\left(x^2+y^2+z^2-1\right)+\lambda_2(x+y+z-1)$$

ונמצא לה נקודות קריטיות, כלומר פתרונות למערכת: $\begin{cases} L_x = 50 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ L_y = \qquad 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ L_z = 50 + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \end{cases}$.

מהמשוואה הראשונה והשלישית נקבל $x = z$ ועם האילוץ השני מתקבלות הנקודות החשודות: $(x, 1-2x, x)$.

יחד עם האילוץ הראשון נקבל: $1 = 2x^2 + (1-2x)^2 = 6x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x(3x-2) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, \frac{2}{3}$.

סה"כ מתקבלות הנקודות: $(0,1,0), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. כיוון שהתחום הוא קומפקטי, עפ"י משפט ווירשטראס שתי הנקודות שמצאנו הן בהכרח נקודות מינימום ומקסימום מוחלטים, לכן נותר רק לעמת בין ערכי הפונקציה בהן:

$$\underbrace{T(0,1,0)}_{\min} = 80 < \underbrace{T\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{\max} = 80 + \frac{200}{3}.$$

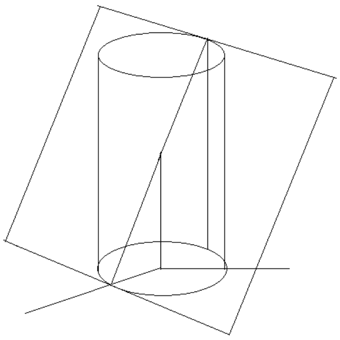
שאלה 4. חשב את שטח מעטפת הגוף החסום ע"י המשטחים: $x^2 + y^2 = 9$, $2x + 5y + z = 6$, $z = 0$

(שים לב שהנקודה $(3,0,0)$ היא נקודת חיתוך של שלושת המשטחים). (25 נק').

פתרון:

את חלק המישור המשופע החסום ע"י הגליל נסמן ב-S_1, את חלק הגליל ב-S_2, ואת הבסיס התחתון ב-S_3.

ההיטל של S_1 על מישור (x,y) הוא העיגול: $D = \{x^2 + y^2 \le 9\}$ ששטחו 9π.



הנורמל המנורמל של S_1 הוא: $\frac{1}{\sqrt{30}}(2,5,1)$, גורם ההטלה הוא: $\sqrt{30}$ לכן: $|S_1| = 9\sqrt{30}\pi$.

השטח של S_2 הוא חצי משטח הגליל בין $z = 0$ ל-$z = 12$ שכן נחתך באמצעו ע"י המישור שעובר דרך שתי נקודות הקיצון $(3,0,0)$, $(-3,0,12)$ ועובר בראשית באמצע הגובה, על כן שטחו הוא: $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\pi \cdot 3 = 36\pi$.

שטח הבסיס התחתון הוא פשוט: $|S_3| = |D| = 9\pi$.

בסה"כ שטח מעטפת הגוף הוא: $9\sqrt{30}\pi + 36\pi + 9\pi = \left(45 + 9\sqrt{30}\right)\pi$.

שאלה 5. העקום L הוא החיתוך: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = \sqrt{3}\, x \end{cases}$. עבור השדה הוקטורי $F = (y, z, x)$ חשב את האינטגרל הקווי $\oint_L F \bullet dr$ כשהכיוון על L הוא הכיוון החיובי (נגד כיוון השעון כשמסתכלים מהצד החיובי של ציר z) (25 נק').

פתרון:

ניעזר במשפט סטוקס ונעבור לשטף רוטור השדה על חלק המישור $z = \sqrt{3}x$ שהוא העיגול S ששפתו L:

$rot(F) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -(1,1,1)$. הנורמל המנורמל ל-$S$ המתאים לכיוון שפתו הוא: $\hat{n} = \frac{1}{2}\left(0, -\sqrt{3}, 1\right)$.

אם כן: $\oint_L F \bullet dr = -\frac{1}{2}\iint_S \left(0, -\sqrt{3}, 1\right) \bullet (1,1,1)\, dS = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\iint_S dS$. העיגול S עובר דרך הראשית שהיא מרכז הספירה לכן בעל רדיוס 3 ולפיכך שטחו 9π. בסה"כ נקבל: $\oint_L F \bullet dr = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\iint_S dS = 9\pi\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.