פיתרון תרגיל בית 8 במתמטיקה בדידה 2 להנדסה, תשע"ט

28 ביוני 2019

הערה כללית: כל הגרפים כאן סופיים, ואם לא נאמר אחרת אז הם גם לא מכוונים.

1. יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, ותהי $e\in E$ קשת כך שהשמטתה הופכת את הגרף ללא־קשיר. הוכיחו שקיים ב־G קודקוד בעל דרגה אי־זוגית.

פתרון:

מהנתונים נובע שהגרף $G'=(V,E\setminus\{e\})$ הינו בעל 2 רכיבי קשירות, נסמנם A,B. הקשת e היא בין A ו־ B (אחרת הגרף המקורי לא היה קשיר), לכן קיימים $a\in A,b\in B$ כך ש־ $e=\{a,b\}$. נסתכל על תת הגרף A: אם a בעל דרגה זוגית בו אז הוא יהיה בעל דרגה אי־זוגית ב־ G (כי יש לו קשת נוספת בגרף המקורי, e). אחרת, דרגתו ב־ A אי־זוגית ולכן לפי משפט לחיצת היחידים שסכום הדרגות זוגיות, קיים עוד קודוד $a\neq a'\in A$ בעל דרגה אי זוגית ב־ A. דרגתו של a' ב־A זהה לדרגתו ב־ G משום שהקשת היחידה שהורדנו לא חלה בו, ולכן נקבל כי קודקוד זה הינו בעל דרגה אי־זוגית ב G.

2. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט עם $|V|=n$, המקיים:

$$\forall v\in V:\deg(v)\geq\frac{n-1}{2}.$$

הוכיחו: לכל שני קודקודים $v\neq u$ שאינם שכנים (כלומר, $\{u,v\}\notin E$), קיים שכן משותף (כלומר, קיים w כך ש־ $\{u,w\}\in E\wedge\{v,w\}\in E$).

פתרון:

א. יהי $G=(V,E)$ גרף כנ"ל, ונניח בשלילה שקיימים שני קודקודים $v\neq u\in V$ שאינם שכנים כך שלכל $w\in V$ מתקיים: $\{u,w\}\notin E\vee\{v,w\}\notin E$. נסמן $\Gamma(v)=\{t\in V|\{v,t\}\in E\},\Gamma(u)=\{t\in V|\{u,t\}\in E\}$, כלומר אוסף השכנים. מהנתון נקבל $|\Gamma(v)|\geq\frac{n-1}{2},|\Gamma(u)|\geq\frac{n-1}{2}$, וכיון שאין להם שכן משותף נקבל שהחיתוך ריק כלומר, $\Gamma(v)\cap\Gamma(u)=\varnothing$, ולכן $|\Gamma(v)\cup\Gamma(u)|\geq 2\cdot\frac{n-1}{2}$ (כלומר, גודל האיחוד הוא סכום הגדלים, נובע מהעובדה שהחיתוך ריק), ובתוספת לv,u עצמם (שבגלל שאינם שכנים הם גם לא נכללים ב־ $\Gamma(u),\Gamma(v)$) נקבל שיש לפחות $2\cdot\frac{n-1}{2}+2=n+1$ קודקודים בגרף, בסתירה לכך שיש n קודקודים.

3. האם קיים גרף **פשוט** עם שישה קודקודים, שדרגות קודקודיו הן: $1,1,2,3,4,5$?

פתרון:

לא: נניח בשלילה שכן. נסמן את הקודקודים ב־ $v_1,\dots,v_6$, ונניח ש־ $\deg(v_1)=\deg(v_2)=1, \forall i>2:\deg(v_i)=i-1$. כולם שכנים של v_6, כיון שדרגתו מקסימלית בגרף פשוט. לכן: $\{v_1,v_6\},\{v_2,v_6\}\in E$. בנוסף כיון ש־ $\deg(v_5)=4$ אז יש לו 4 שכנים, ולכן: $\{v_1,v_5\}\in E\vee\{v_2,v_5\}\in E$ (כי אין ארבעה קודקודים חוץ מ־v_5 השונים משניהם), ולכן: $\deg(v_1)\geq 2\vee\deg(v_2)\geq 2$ בסתירה.

4. יהי $n\in\mathbb{N}$, ותהי $0\leq d_1\leq d_2\leq\dots\leq d_n$ סדרת מספרים שלמים. הוכיחו שאם $d=\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ מספר זוגי אז קיים גרף (לאו דוקא פשוט) $G=(V=\{v_1,\dots v_n\},E)$ ($|V|=n$), המקיים: $\forall 1\leq i\leq n:\deg(v_i)=d_i$. (הדרכה אפשרית: אינדוקציה)

<u>פתרון:</u>

באינדוקציה על n.

עבור $n=1$ מדובר בגרף עם קודקוד יחיד, ולכן זו סדרה עם איבר יחיד d_1, ואכן אם הוא זוגי יש גרף עם קודקוד אחד ו־ $\frac{d_1}{2}$ לולאות המקיים את התנאי. עבור $n=2$ מדובר בגרף עם שני קודקודים. $d_1\leq d_2$ מקיימים d_1+d_2 מס' זוגי. אזי, אם שניהם זוגיים, ניקח את הגרף $G=(\{v_1,v_2\},E)$ כאשר ב־E יש $\frac{d_1}{2}$לולאות סביב v_1 ו־ $\frac{d_2}{2}$ לולאות סביב v_2. אם שניהם אי־זוגיים אז נחבר ביניהם d_1 קשתות, ונוסיף עוד $0\leq\frac{d_2-d_1}{2}\in\mathbb{Z}$ לולאות סביב v_2 (כיון ששניהם אי־זוגיים אז המונה זוגי ולכן נקבל מס' שלם של לולאות).

נניח נכונות לכל $1\leq k\leq n$ ונוכיח עבור $n+1$:

תהי $0\leq d_1\leq d_2\leq\dots\leq d_n\leq d_{n+1}$ סדרת מס' שלמים המקיימת: $d=\sum\limits_{i=1}^{n+1} d_i$ מס' זוגי. אם קיים j כך ש־ d_j מס' זוגי אז נוכל לבנות סדרה בלעדיו, וגם שם נקבל $d'=\sum\limits_{j\neq i=1}^{n+1} d_i$ מס' זוגי ולכן, מהנחת האינדוקציה יש גרף עם n קודקודים שאלו דרגות קודקודיו. נוסיף לגרף זה קודקוד עם $\frac{d_j}{2}$ לולאות וקיבלנו גרף עם $n+1$ קודקודים שכל ה־d_i הם דרגות קודקודיו.

אחרת, כל הדרגות אי זוגיות, ולכן עבור הסדרה $0\leq d_1\leq\dots\leq d_{n-1}$ מתקיים: $d'=\sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i$ מס' זוגי (כי הורדנו שני אי־זוגיים, כלומר מס' זוגי), ולכן לפי הנחת האינדוקציה (שימו לב שמכאן החשיבות לשני בסיסים שעשינו בהתחלה, כי אנחנו יורדים 2 אחורה) קיים גרף שקודקודיו $\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$מקיימים: $\deg(v_i)=d_i$, ונוסיף לו עוד שני קודקודים v_n,v_{n+1} עם הדרגות d_n,d_{n+1} כמו בסיס האינדוקציה בשני קודקודים בעלי דרגות אי־זוגיות.

5. יהי $G=(V,E)$ גרף לא ריק ומכוון (כלומר, $E\subseteq V\times V$).

(א) נניח ש־ E היא פונקציה. הוכיחו: $\sum\limits_{v\in V} d_{in}(v)=|V|$.

(ב) נניח ש־ E היא פונקציה חח"ע. יהי $v\in V$, מצאו את $d_{in}(v)$.

פתרון:

במקרה המכוון ניתן להתייחס ל־ $E\subseteq V\times V$ כאל יחס מ־V ל־V.

א. כיון ש־E היא פונקציה מדובר ביחס המקיים: לכל $v\in V$ קיים ויחיד $u\in V$ כך ש־ $(v,u)\in E$ (מה שקראנו שלמות וחד־ערכיות). ולכן מתקיים: $\forall v\in V:\deg_{out}(v)=1$, ולכן: $\sum\limits_{v\in V}\deg_{out}(v)=|V|$, וממשפט לחיצת הידיים לגרפים מכוונים נקבל: $\sum\limits_{v\in V}\deg_{in}(v)=\sum\limits_{v\in V}\deg_{out}(v)=|V|$.

ב. כאן, כיון שהפונקציה היא חח"ע נובע שהיא גם על כי מדובר בפונקציה מקבוצה סופית לעצמה. ולכן נקבל שלכל $v\in V$ קיים (כי על) ויחיד (כי חח"ע) $u\in V$ כך ש־ $(u,v)\in E$, ולכן נקבל שלכל $v\in V$ מתקיים: $\deg_{in}(v)=1$.

6. יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון וקשיר חזק. תהי $E'\supseteq E$. כיון ש־ $E'\subseteq V\times V$ ניתן להתבונן עליה כיחס מ־V ל־V. נניח ש־ E' יחס טרנזיטיבי, מצאו את הגרף $G'=(V,E')$.

פתרון:

ניזכר שהעובדה שהגרף $G=(V,E)$ קשיר חזק אומרת שלכל $u,v\in V$ קיימת מסילה מכוונת $u=u_0\to u_1\to\cdots\to u_k=v$.
במקרה כזה נקבל ש־E' שהוא יחס טרנזיטיבי צריך להכיל גם : $(u,v)\in E'$. הסבר:

באינדוקציה על אורך המסילה. עבור מסילה באורך 2 $u_0\to u_1\to u_2$ נקבל $(u_0,u_1),(u_1,u_2)\in E'$ ומטרנזיטיביות גם $(u_0,u_2)\in E'$. נניח ל־n ותהי מסילה באורך $n+1$ $u_0\to\cdots\to u_n\to u_{n+1}$ מהנחת האינדוקציה נקבל $(u_0,u_n)\in E'$, ומהמסילה כמובן $(u_n,u_{n+1})\in E'$, ומטרנזיטיביות נקבל $(u_0,u_{n+1})\in E'$.

בסה"כ קיבלנו שלכל $u,v\in V$ מתקיים: $(u,v)\in E'$, ולכן נקבל: $E'=V\times V$, כלומר, זהו הגרף המכוון המלא.

7. במוזיאון ישראל תלויות תמונות משני צידי המסדרונות. בפני מבקרי המוזיאון עומדת הבעייה כיצד לראות את כל תמונות המוזיאון מבלי לבקר במסדרון יותר מפעמיים, כאשר במעבר במסדרון הם מתבוננים על תמונות התלויות בצד אחד בלבד של המסדרון. בסיום הביקור הם רוצים להגיע לנקודת המוצא. הוכיחו שניתן לערוך ביקור כזה במוזיאון.

פתרון:

נתבונן בגרף $G=(V,E)$ המוגדר ע"י: V היא קבוצת הצמתים במוזיאון. בין כל שני קודקודים יש קשת כפולה אם ורק אם יש מסדרון בין הצמתים המתאימים במוזיאון. מהגדרת הגרף נקבל שדרגת כל הקודקודים היא זוגית (כי כל מסדרו שעובר באחד הצמתים מוסיף לו 2 לדרגה), ולכן לפי משפט אוילר יש בגרף מעגל אוילר המתחיל ומסיים בנקודת המוצא. במהלך ההילוך במעגל המבקרים עוברים פעמיים בכל מסדרון (כי כל מסדרון מתאים לקשת כפולה), ויוכלו להסתכל על התמונות משני צדדיו.

8. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט, קשיר ומישורי. הוכיחו שקיים קודקוד שדרגתו לכל היותר 5. הדרכה: השתמשו במה שהוכחנו בתרגול $e\le 3(v-2)$.

פתרון:

סימונים: $v=|V|,e=|E|$. נתבונן בממוצע דרגות הקודקודים: $\frac{\sum\limits_{u\in V}\deg(u)}{v}$. לפי למת לחיצת הידיים נקבל: $\frac{\sum\limits_{u\in V}\deg(u)}{v}=\frac{2e}{v}$.
כעת, ממה שהוכחנו בתרגול נקבל:

$$\frac{\sum\limits_{u\in V}\deg(u)}{v}=\frac{2e}{v}\le\frac{2\cdot 3(v-2)}{v}=6-\frac{4}{v}<6$$

קיבלנו שממוצע דרגות הקודקודים קטן ממש מ־6, ולכן בהרכח קיים קודקוד שדרגתו קטנה ממש מ־6 כלומר, לכל היותר 5.

9. גרף פטרסן $G=(V,E)$ מוגדר באופן הבא: תהי $X=\{1,2,3,4,5\}$ קבוצה. קבוצת הקודקודים היא:

$$V=\{\{i,j\}\subseteq X|i\neq j\}$$

(כלומר, קודקודי הגרף הם קבוצות עם שני איברים מ־X, כמו $\{1,2\},\{2,3\}$). קבוצת הצלעות היא:

$$E=\{\{\{i,j\},\{n,m\}\}\,|\{i,j\}\cap\{n,m\}=\varnothing\}$$

(כלומר, יש צלע בין $\{i,j\}$ ו־ $\{n,m\}$ אם ורק אם $\{i,j\}\cap\{n,m\}=\varnothing$). למשל, הקודקודים $\{1,2\}$ ו־ $\{3,5\}$ יחוברו בצלע, ואילו הקודקודים $\{1,2\}$ ו־$\{1,4\}$ לא.

(א) מה מספר הקודקודים בגרף?

(ב) מהי דרגת כל קודקוד?

(ג) הסיקו את מספר הצלעות בגרף.

(ד) עובדה: בגרף פטרסן אין מעגל מאורך קטן מ־5. הוכיחו שגרף פטרסן איננו מישורי.

<u>פתרון:</u>

א. מס' הקודקודים הוא כמס' תתי הקבוצות מגודל 2 של קבוצה מגודל 5 כלומר, $10 = \binom{5}{2}$.

ב. בהינתן קודקוד $\{i,j\}$ הוא מחובר בקשת לכל קודקוד שהוא תת קבוצה של $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{i,j\}$ עם שני איברים. לכן יש $\binom{3}{2} = 3$ כאלה. כלומר $\forall u \in V : \deg(u) = 3$.

ג. מלמת לחיצת הידיים נקבל: $2e = \sum\limits_{u\in V} \deg(u) = \sum\limits_{u\in V} 3 = 3 \cdot v = 30$, ומכאן: $e = 15$.

ד. נניח בשלילה שהוא מישורי, ונקבל: $10 - 15 + f = 2 \Rightarrow f = 7$. נסמן את קבוצת התחומים ב־ A, ובהינתן תחום $F \in A$ נסמן ב־ t_F את מס' הקשתות החלות בתחום. ראינו שמתקיים: $30 = 2e \geq \sum\limits_{F\in A} t_F$. אנחנו מסכמים כאן שבעה מס' טבעיים. לכן בממוצע נקבל: $5 > \frac{30}{7} \geq \frac{1}{7}\sum\limits_{F\in A} t_F$, כלומר המספר הממוצע של קשתות החלום בתחום כלשהו F קטן מ־5, ולכן יש קשת עם לכל היותר 4 קשתות בסתירה לעובדה.