תרגיל בית 9 – מופשטת 1

<u>שאלה 1</u>

נניח ש- $\varphi: H \to G$,$\psi: G \to H$ הומומורפיזמים כך ש- $\psi \circ \varphi = Id_H$. הוכיחו:

א. φ חח"ע, ψ על.

ב. $G = Ker(\psi) \rtimes Im(\varphi)$.

<u>שאלה 2</u>

א. תהיינה K,Q חבורות. $\theta: Q \to Aut(K)$ הומומורפיזם. הוכיחו ש- $K \rtimes_\theta Q$ היא חבורה.

ב. הראו שאם K אינה אבלית או Q אינה אבלית אז $K \rtimes_\theta Q$ אינה אבלית.

ג. הראו שאם $\theta: Q \to Aut(K)$ אינו ההומומורפיזם הטריוויאלי אז $K \rtimes_\theta Q$ אינה אבלית גם אם K ו Q אבליות.

<u>שאלה 3</u>

רשמו את שוויון המחלקות עבור החבורות S_4, S_5, D_4, Q_8.

למשל: שוויון המחלקות של D_6 היא $12 = 2+3+3+2+2$.

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו שלכל הומומורפיזם $\theta: \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ מתקיים $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2^{\ 3}$ או $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2 \cong D_4$.

<u>שאלה 5</u>

נתבונן בתת חבורה $H = \langle (123),(456) \rangle \le S_6$.

א. תארו את המְרַכֵּז $C_{S_6}(H)$.

<u>רמז</u>: אם $g \in C_{S_6}(H)$ אזי הוא מצמיד את (123) לעצמו ואת (456) לעצמו. אז אפשר לחשב את המְרַכֵּז של $\langle (123) \rangle$ ואת המְרַכֵּז של $\langle (456) \rangle$ ולאחר מכן לעשות חיתוך.

ב. הוכיחו שמתקיים $N_{S_6}(H) = \langle H,(56),(23),(14)(25)(36) \rangle$.

ג. הוכיחו שמתקיים $N_{S_6}(H) / C_{S_6}(H) \cong D_4$.

<u>שאלה 6</u>

תהא G חבורה כך ש- $|G| = p^k$ עבור p ראשוני. תהא $H \lhd G$ כך ש- $|H| = p$. הוכיחו כי $H \subseteq Z(G)$.

הערה: ניתן לפתור שאלה זו ביותר מדרך אחת. נסו לפתור אותה באמצעות משפט N/C.

הגדרה

האקספוננט של חבורה G הוא המספר החיובי הקטן ביותר N כך ש-$a^N=1$ לכל $a\in G$, ומסמנים אותו ב-$\exp(G)$.

שאלה 7

תהי G חבורה אבלית סופית.

א. הוכיחו שלכל מספר טבעי d המקיים $(d,|G|)=1$ הפונקציה $x\mapsto x^d$ מגדירה אוטומורפיזם של G.

ב. הוכיחו שיש שיכון של $U_{\exp(G)}$ ב- $Aut(G)$.

הדרכה: היעזרו בסעיף א' על מנת להגדיר את השיכון. כלומר, התאימו לכל $d\in U_{\exp(G)}$ אוטומורפיזים כלשהו $f_d\in Aut(G)$.

שאלת אתגר

תהי G חבורה סופית כלשהי. הוכיחו שאם $Aut(G)$ ציקלית ולא טריוויאלית, אזי היא מסדר זוגי.

בהצלחה!