

מתמטיקה בדידה - בוחן

כ' כסליו, 20.12

ענו על כל השאלות הבאות. הציון המקסימלי אליו ניתן להגיע הוא 110.

1. (40 נקודות) הוכיחו שהמשפטים הבאים שקולים תיאטולוגית:

א. כשאני עייף ורעב אני נעשה לא מרוכז.

ב. אני או לא עייף או לא רעב, או שאני לא מרוכז.

פתרון:

ראשית נצריך את שני המשפטים. נסמן:

אני עייף = A

אני רעב = B

אני מרוכז = C .

אז $A \wedge B \implies \neg C$

ב' = $((\neg A) \vee (\neg B)) \vee (\neg C)$

נכתוב טבלת אמת משותפת לשני הפסוקים, וכך נראה שהם שקולים.

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg C$	$A \wedge B \implies \neg C$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$((\neg A) \vee (\neg B)) \vee (\neg C)$
T	T	T	T	F	F	F	F	F	F
T	T	F	T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T	T

2. (30 נקודות) נתונות הקבוצות: $A = \{1, 2\}$, $B = \{\emptyset, 2, 1\}$, $C = \emptyset$

חשבו: $P(A \cup B) \setminus P(C)$

פתרון:

$$P(A \cup B) \setminus P(C) = P(\{\emptyset, 1, 2\}) \setminus P(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, 2\}, \{1, 2\}, \{\emptyset, 1, 2\}\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, 2\}, \{1, 2\}, \{\emptyset, 1, 2\}\}$$

3. (40 נקודות) הוכיחו: לכל 3 קבוצות A, B, C מתקיים:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

נוכיח הכלה זו כיוונית.
⊇ יהי

$$x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

↓

$$x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C$$

↓

$$x \in A \wedge x \in B \wedge (x \notin A \vee x \notin C)$$

* ↓

$$x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$$

↓

$$x \in A \wedge x \in B \setminus C$$

↓

$$x \in A \cap (B \setminus C)$$

* הסבר למעבר: ידוע כבר ש $x \in A$. לכן האופציה ש $x \notin A$ לא תיתכן. אז נשארנו עם האופציה: $x \notin C$.
⊆ יהי

$$x \in A \cap (B \setminus C)$$

↓

$$x \in A \wedge x \in (B \setminus C)$$

2

↓

$$x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$$

↓

$$x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap C$$

↓

$$x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$