פתרון

1. $\Longleftarrow$אם A סדורה היטב אז כל תת קבוצה של A סדורה היטב, ובפרט כל רישא.
$\Longrightarrow$ תהי $\emptyset \neq B \subset A$. נקח $b \in B$. אם b ראשון, סיימנו. אחרת, נסתכל על $seg(b)$. מכיוון שb לא ראשון בB נקבל ש$B \cap seg(b) \neq \emptyset$. לפי הנתון, $seg(b)$ סדורה היטב, ולכן ל $B \cap seg(b)$ יש איבר ראשון. נקרא לו c. אנחנו רוצים להוכיח שc ראשון בB. ראשית, מהבניה, אכן $c \in B$. עוד נשם לב ש$c \in seg(b)$ ולכן $c < b$. כעת, נניח שיש $x \in B$ כך ש $x < c$. בפרט, $x < b$ ולכן $x \in B \cap seg(b)$. סתירה לבחירת c.

2. א. נסתכל על $\mathbb{R}$ ובתוכו על הקבוצה $(-\infty, 0]$. קל לראות שהיא רישא. היא לא נקבעת ע"י שום איבר, כי לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ קיים $\epsilon < 0$ כך ש $\epsilon \notin (-\infty, 0]$.
ב. $\mathbb{Z}$ אינה סדורה היטב, אולם כל רישא אמיתית ב$\mathbb{Z}$ נקבעת ע"י איבר.

3. יהיו $\{A_i\}$ קבוצות $\in$ −טרנזיטיביות. הוכיחו: $\cap A_i$ ו$\cup A_i$ הן קבוצות $\in$ −טרנזיטיביות.

פתרון: $\cap A_i$: יהי $y \in x \in \cap A_i$. מהגדרת חיתוך, לכל i, $x \in A_i$. כל הקבוצות טרנזיטיביות, ולכן לכל i, $y \in A_i$. $\Longleftarrow y \in \cap A_i$.

$\cup A_i$: יהי $y \in x \in \cup A_i$. מהגדרת איחוד, קיים i כך ש $x \in A_i$. A_i טרנזיטיבית ולכן $y \in A_i$. $\Longleftarrow y \in \cup A_i$.

4. תנו דוגמא לקבוצה $\in$־ טרנזיטיבית שאינה סודר.

פתרון: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. קל לראות שהיא $\in$־ טרנזיטיבית. היא אינה סודר כי $\in$ לא מהווה עבורה יחס סדר בכלל. הוא לא טרנזיטיבי: $\{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset\} \in \emptyset$, אבל $\{\emptyset\} \notin \emptyset$.

5. . תהי A קבוצה. נסמן: $A_0 = A$, $A_n = A_{n-1} \cup (\cup A_{n-1})$, $tc(A) = \cup A_n$.

הוכיחו: $tc(A)$ היא הקבוצה ה$\in$־ טרנזיטיבית המינימלית שמכילה את A.

פתרון: ראשית, נוכיח שהיא מכילה את A.

$A = A_0 \subseteq \cup A_n$.

שנית, נוכיח שהקבוצה $\in$־ טרנזיטיבית.

יהי $y \in x \in tc(A)$. $\exists n : x \in A_n \Longleftarrow x \in tc(A)$. $\Longleftarrow y \in A_{n+1} \Longleftarrow y \in \cup A_n$
$y \in \cup A_n \Longleftarrow x \subseteq \cup A_n \Longleftarrow x \in A_n$.

כעת, נוכיח ש$tc(A)$ הוא הראשון שמקיים זאת.

תהי B קבוצה $\in$ −טרנזיטיבית כך ש $A \subseteq B$. נוכיח ש $tc(A) \subseteq B$. נוכיח את זה באינדוקציה.

עבור $n = 0$: נתון ש $A \subseteq B$.

נניח ש $A_n \subseteq B$. נוכיח ש $A_{n+1} \subseteq B$.

B טרנזיטיבית, ולכן $\cup A_n \subseteq B$. אזי $A_{n+1} = A_n \bigcup (\cup A_n) \subseteq B$.