

תרגיל 9

11 בינואר 2016

1. לגבי כל אחד מהייחסים הבאים קבעו האם הוא יחס סדר חלקי, קבעו אם הוא יחס סדר מלא ומצאו אם יש לו איבר מקסימלי, איבר מינימלי, גדול ביותר (מקסימום) וקטן ביותר (מינימום):
- א. יחס סדר לקסיקוגרפי \leq_{lex} על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדר על ידי $(a, b) \leq_{lex} (c, d)$ אם $(a < c)$ או $(a = c \text{ and } b \leq d)$?
- ב. יחס סדר קרטזי \leq_{Cart} על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדר על ידי $(a, b) \leq_{Cart} (c, d)$ אם $(a \leq c)$ וגם $(b \leq d)$?
- ג. יחס סדר \leq הרגיל, המוגדר על הקבוצה $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$?
- ד. $R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq b^2\}$ מעל המספרים הממשיים (\mathbb{R}) .

פתרון:

- א. יחס סדר מלא, יש לו איבר מינימום $(0, 0)$ שהוא גם המינימלי היחיד, אין לו מקסימום ואין לו איבר מקסימלי, כי לכל איבר $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n > a$ ולכן $(a, b) \neq (n, m)$ ומקיים $(a, b) \leq (n, m)$ (ולכל m).
- ב. אינו יחס סדר מלא כי קימים איברים שלא מתיחסים דוג' לכל $a \neq b$, (a, b) , (b, a) לא מתייחסים $(a, b) \not\leq_{Cart} (b, a) \wedge (b, a) \not\leq_{Cart} (a, b)$. יש לו איבר מינימום $(0, 0)$ שהוא גם המינימלי היחיד, אין לו איברים מקסימליים, כי לכל איבר $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n > a$ ולכן $(a, b) \leq (n, m)$ לכל $b \leq m$.
- ג. יחס סדר מלא, יש לו איבר מקסימלי 1, אין לו איבר מינימלי כי 0 אינו בקבוצה.
- ד. היחס אינו יחס סדר כי $-1R1$ וגם $1R-1$ אבל $1 \neq -1$ ולכן היחס אינו אנטי סימטרי.

2. א. בקבוצה $\{2, 3, 4, \dots, 999, 1000\}$ הסדורה חלקית לפי | (מחלק ללא שארית) ישנם בדיוק 500 איברים מקסימליים מהם?
- ב. רשום לפחות 10 איברים מינימליים בקבוצה סדורה זו.
- ג. האם יש בקס"ח זו איבר קטן ביותר או איבר גדול ביותר? אם אין הוסף 2 מספרים לקבוצה שימלאו תפקידים אלו. מה יהיו האיברים המינימליים והמקסימליים בקס"ח המורחבת?

פתרון:

- א. כל האיברים בין 501 ל-1000 אינם מחלקים אף מספר בקבוצה ולכן מקסימליים, לכל שאר האיברים קיים בקבוצה איבר שהוא פי שניים מהם לכן הם מחלקים אותו ואינם מקסימליים.
- ב. צריך פשוט לבחור מספרים ראשוניים שכמובן לא מתחלקים באף מספר.

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$

ג. אין איבר קטן ביותר וגם אין איבר גדול ביותר. אם היה אז הוא היה המקסימלי\מינימלי יחיד, והראנו שיש הרבה מקסימליים\מינימליים.
אם נוסף את 1 הוא יהיה מינימום ו- $500 \cdot 499 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 500!$ יהיה מקסימום כי כל איבר מחלק אותו. (אפשר למצוא מקסימום קטן יותר שהוא בדיוק הכסולה המשותפת המינימלית).

3. תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר חלקי על A .

א. נגדיר את היחס ההופכי של R על A בצורה הבאה: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$. הוכיחו כי R^{-1} יחס סדר חלקי.
ב. תהי $B \subseteq A$ נגדיר $S = R \cap B \times B$ הוכיחו כי S הוא יחס סדר על B .

פתרון:

א.

רפלקסיביות: לכל $a \in A$ $(a, a) \in R$ ולפי הגדרת R^{-1} מתקיים $(a, a) \in R^{-1}$.
אנטי סימטרי: צ"ל $a = b$ $\rightarrow (a, b) \in R^{-1}, (b, a) \in R^{-1}$.
נניח כי $(a, b) \in R^{-1}, (b, a) \in R^{-1}$ אז $(a, b) \in R$ אבל $(b, a) \in R$ יחס סדר חלקי ולכן אנטי סימטרי לכן בהכרח $a = b$.
טרנזיטיבי: $(a, c) \in R^{-1} \rightarrow (a, b) \in R^{-1}, (b, c) \in R^{-1}$.
נניח כי $(a, b) \in R^{-1}, (b, c) \in R^{-1}$ אזי $(a, b) \in R$ אבל $(b, c) \in R$ רפלקסיבי (כי הוא יחס סדר) ולכן $(c, a) \in R$ ולכן $(c, a) \in R^{-1}$.

ב.

רפלקסיבי: לכל $b \in B$ מתקיים $b \in A$ כי $B \subseteq A$, ולכן $(b, b) \in R$ (כי R רפלקסיבי כיחס מעל A). כמוכן שמתקיים $(b, b) \in B \times B$ ולכן $(b, b) \in R \cap B \times B = S$.
אנטי סימטרי: נניח כי $(a, b) \in S = R \cap B \times B$ אזי $(a, b) \in R$ ולכן $(b, a) \in R$ כי $a = b$ אנטי סימטרי.
טרנזיטיביות: נניח כי $(a, b) \in S = R \cap B \times B$ אזי $(a, b) \in R$ וגם $(b, c) \in B \times B$ (מהגדרה של S כחיתוך של R עם $B \times B$) לכן ניתן להסיק כי $(a, c) \in R$ כי R טרנזיטיבי.
 $(a, b) \in B \times B, (b, c) \in B \times B$ לכן ניתן להסיק כי $(a, c) \in B \times B$ (כי מהגדרת מכפלה קרטזית בהכרח $a, b, c \in B$).
ולכן בסה"כ $(a, c) \in R \cap B \times B$.

4. הוכח או הפרך:

א. קבוצה R יחס סדר חלקי מעל A , אם $a \in A$ איבר מינימלי יחיד אזי a הוא איבר קטן ביותר (מינימום) ב- A ?
ב. קבוצה סופית, R יחס סדר חלקי מעל A . אם $a \in A$ איבר מינימלי יחיד אזי a הוא איבר קטן ביותר (מינימום) ב- A ?

פתרון:

א. דוגמה נגדית נגדיר יחס R מעל $A = \mathbb{Z} \cup \{1\}$, בצורה הבאה aRb אם $a = b = 1$ או $a, b \in \mathbb{Z} \wedge a \leq b$. צ"ל שזה יחס סדר חלקי:

רפלקסיביות: לכל $a \in A$ אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה aRa וכן אם $a \in \mathbb{Z}$ גם כן מתקיים aRa .

אנטי סמטריות: אם $(a, b), (b, a) \in R$ אזי אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה $a = b$. אם $a \in \mathbb{Z}$ אזי בהכרח לפי הגדרת היחס גם $b \in \mathbb{Z}$ ואם $a \leq b \wedge b \leq a$ בהכרח $a = b$.

טרנזיטיביות: אם $(a, b), (b, c) \in R$ אזי אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה $a = b = c$ וכמו כן $(a, c) \in R$. אם $a \in \mathbb{Z}$ אזי בהכרח לפי הגדרת היחס גם $b \in \mathbb{Z}$ וגם $c \in \mathbb{Z}$ ומתקיים $a \leq b \leq c$ ובפרט $(a, c) \in R$.

$\{1\}$ הוא איבר מינימלי יחיד בקבוצה כי פרט לעצמו אף איבר לא ניתן להשוואה עימו, והוא לא הקטן ביותר כי אף איבר לא ניתן להשוואה עימו.

ב. נניח ש- a מינימלי יחיד נוכיח ש- a מינימום:
 נסמן $B = \{b \in A \mid (a, b) \notin R\} \subseteq A$,
 אם ריקה אזי a קטן ביותר, וסיימנו. (נימוק אם B ריקה זה אומר לכל $b \in A$ מתקיים $(a, b) \in R$ שזה בדיוק הגדרת איבר קטן ביותר)
 אם B אינה ריקה אזי בהכרח קיים בה איבר מינימלי נסמנו ב- b . (זה משפט שלא קשה להוכיח, בקבוצה סופית קיים איבר מינימלי ואיבר מקסימלי).
 b מינימלי גם ב- A נימוק: לכל $x \in A$ אם $b \neq x$ אזי $(x, b) \notin R$ (כי b מינימלי).
 ואם $x \notin B$ אזי $(a, x) \in R$ ואם $(x, b) \in R$ מטרנזיטיביות נקבל ש- $(a, b) \in R$ סתירה ל- $b \in B$ ולכן $(x, b) \notin R$.
 לכן גם כן מינימלי בסתירה להיות a מינימלי יחיד, ולכן בהכרח B ריקה ו- a מינימום.