<u>פתרון תרגיל 6</u>

1. כיוון שעל המסה לא פועלים כוחות (במערכת המעבדה) אזי היא תנוע במהירות קבוע. לשם פשטות נניח כי הכיוון הזה הוא $\hat{x}$ (למעשה אנו מגדירים את כיוון $\hat{x}$ על פי כיוון התנועה של המסה ־ אפשר גם לקרוא לכיוון הזה $\hat{n}$ אבל זה לא ישנה את התוצאה). קיבלנו אם כן שבמעבדה

$$\boxed{\vec{v}_{\rm lab} = v_0\hat{x}}.$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{\rm lab} = (-R+v_0t)\hat{x}$$

על מנת למצוא את המהירות במערכת הדיסקה, נשתמש בקשר

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{r}'.$$

אנו יודעים כי עבור $\vec{r},\vec{r}'$ מתקיים $\vec{r}' = \vec{r}$ ולכן

$$\vec{v}' = v_0\hat{x} - \vec{\omega}\times(-R+v_0t)\hat{x} = v_0\hat{x} - (-R+v_0t)\omega\hat{y},$$

כאשר הנחנו ש־ $\omega$ חיובי עבור סיבוב הוא נגד כיוון השעון, ואז $\vec{\omega}\times\hat{x} = \hat{y}$. כדי לרשום את התוצאה במערכת הקור' של הדיסקה נניח שהצירים של שתי המערכות מתלכדים ב־ $t=0$, כלומר

$$\hat{x}' = \hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t,$$

$$\hat{y}' = -\hat{x}\sin\omega t + \hat{y}\cos\omega t,$$

ולכן

$$\hat{x} = \hat{x}'\cos\omega t - \hat{y}'\sin\omega t$$

$$\hat{y} = \hat{x}'\sin\omega t + \hat{y}'\cos\omega t$$

מהצבה בתוצאה הקודמת מקבלים

$$\vec{v}' = v_0(\hat{x}'\cos\omega t - \hat{y}'\sin\omega t) + \omega(R-v_0t)(\hat{x}'\sin\omega t + \hat{y}'\cos\omega t),$$

כלומר

$$\boxed{\vec{v}' = [v_0\cos\omega t + \omega(R-v_0t)\sin\omega t]\hat{x}' + [-v_0\sin\omega t + \omega(R-v_0t)\cos\omega t]\hat{y}'}.$$

2. (א) נניח כי ב־ $t=0$ שני האנשים נמצאים, במערכת המעבדה בנקודות $\vec{r}_A=-d\hat{x}$ ו־ $\vec{r}_B=d\hat{x}$, וכי $A$ זרק את המסה במהירות $\vec{v}=v_x\hat{x}+v_y\hat{y}$ יחסית לקרקע. לאחר זמן $t$, בשל הסיבוב של הדיסקה, $B$ יהיה בנקודה

$$\vec{r}_B(t)=d\cos\omega t\hat{x}+d\sin\omega t\hat{y},$$

והמסה בנקודה

$$\vec{r}_m(t)=\vec{r}_m(t=0)+\vec{v}t=-d\hat{x}+v_xt\hat{x}+v_yt\hat{y}.$$

מכיוון שברגע $T$ המסה ו־$B$ נפגשים אזי ברור כי (במערכת המעבדה)

$$v_x=\frac{d}{T}(1+\cos\omega T),$$

$$v_y=\frac{d}{T}\sin\omega T.$$

כעת יש לעבור למערכת הדיסקה. לשם כך נשתמש בקשר

$$\vec{v}'=\vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}'.$$

אנו יודעים כי עבור $\vec{r},\vec{r}'$ מתקיים $\vec{r}=\vec{r}'$ ולכן

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \vec{v}-\vec{\omega}\times\vec{r}_m,\\ &= v_x\hat{x}+v_y\hat{y}-\vec{\omega}\times(-d\hat{x}+v_xt\hat{x}+v_yt\hat{y})\\ &= v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+\omega(d-v_xt)\hat{y}+\omega v_yt\hat{x}\\ &= (v_x+\omega v_yt)\hat{x}+(v_y+\omega d-\omega v_xt)\hat{y}\\ &= \frac{d}{T}\left[(1+\cos\omega T+\omega t\sin\omega T)\hat{x}+(\sin\omega T+\omega(T-t)-\omega t\cos\omega T)\hat{y}\right]\end{aligned}$$

כאשר הנחנו ש־ $\omega$ הוא חיובי עבור סיבוב נגד כיוון השעון, ואז $\vec{\omega}\times\hat{x}=\hat{y}$ ו־ $\vec{\omega}\times\hat{y}=-\hat{x}$.
כדי לרשום את התוצאה במערכת הקור' של הדיסקה נניח שהצירים של שתי המערכות מתלכדים ב־ $t=0$, כלומר

$$\hat{x}'=\hat{x}\cos\omega t+\hat{y}\sin\omega t,$$

$$\hat{y}'=-\hat{x}\sin\omega t+\hat{y}\cos\omega t,$$

ולכן

$$\hat{x}=\hat{x}'\cos\omega t-\hat{y}'\sin\omega t$$

$$\hat{y}=\hat{x}'\sin\omega t+\hat{y}'\cos\omega t$$

מהצבה בתוצאה הקודמת מקבלים לבסוף

$$\begin{aligned}
\vec{v}' &= \frac{d}{T}\left[(1+\cos\omega T+\omega t\sin\omega T)(\hat{x}'\cos\omega t-\hat{y}'\sin\omega t)+(\sin\omega T+\omega(T-t)-\omega t\cos\omega T)(\hat{x}'\sin\omega t+\hat{y}'\cos\omega t)\right], \\
&= \frac{d}{T}[\cos\omega t+(\cos\omega T\cos\omega t+\sin\omega T\sin\omega t)+\omega t(\sin\omega T\cos\omega t-\cos\omega T\sin\omega t)+\omega(T-t)\sin\omega t]\hat{x}' \\
&\quad \frac{d}{T}[-\sin\omega t+(\sin\omega T\cos\omega t-\cos\omega T\sin\omega t)-\omega t(\sin\omega T\sin\omega t+\cos\omega T\cos\omega t)+\omega(T-t)\cos\omega t]\hat{y}' \\
&= \frac{d}{T}[\cos\omega t+\cos\omega(T-t)+\omega t\sin\omega(T-t)+\omega(T-t)\sin\omega t]\hat{x}' \\
&\quad +\frac{d}{T}[-\sin\omega t+\sin\omega(T-t)-\omega t(\cos\omega(T-t)+\omega(T-t)\cos\omega t]\hat{y}'
\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}
\vec{v}' &= \frac{d}{T}[\cos\omega t+\cos\omega(T-t)+\omega t\sin\omega(T-t)+\omega(T-t)\sin\omega t]\hat{x}' \\
&\quad +\frac{d}{T}[-\sin\omega t+\sin\omega(T-t)-\omega t(\cos\omega(T-t)+\omega(T-t)\cos\omega t]\hat{y}'
\end{aligned}$$

(ב) הקשר בין התאוצות המערכת המעבדה ומערכת הדיסקה ניתן ע"י

$$\vec{a}' = \vec{a}-2\vec{\omega}\times\vec{v}'-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') \quad (\vec{a}=0),$$

כאשר במיקרה שלנו $\vec{a}=0$, כיוון שעל הדיסקה לא פועלים כוחות אמיתיים. בקור' פולריות יחסית לדיסקה ($\hat{r}'$ *משנה כיוון יחסית לצופה המסתובב יחד עם הדיסקה*)

$$\vec{\omega}\times\hat{r}'=\omega\hat{\theta}' \quad ; \quad \vec{\omega}\times\hat{\theta}'=-\omega\hat{r}'$$

ו־

$$\vec{v}'=\dot{r}'\hat{r}'+r'\dot{\theta}'\hat{\theta}'.$$

יש לזכור כאן, כי

$$\dot{\theta}'\neq\omega,$$

כאשר $\omega$ היא תדירות הסיבוב של הדיסקה, בעוד $\dot{\theta}$ היא קצב הסיבוב של המסה *יחסית לדיסקה*. נציב את הקשרים שלנו במשוואה לתאוצות ונקבל

$$\begin{aligned}
\vec{a}' &= -2\vec{\omega}\times(\dot{r}'\hat{r}'+r'\dot{\theta}'\hat{\theta}')-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times r'\hat{r}') \\
&= -2\omega\dot{r}'\hat{\theta}'+2\omega r'\dot{\theta}'\hat{r}'+\omega^2 r'\hat{r}'
\end{aligned}$$

אבל אנו יודעים שבקור' פולריות

$$\vec{a}'=(\ddot{r}'-r'\dot{\theta}'^2)\hat{r}'+(2\dot{r}'\dot{\theta}'+r'\ddot{\theta}')\hat{\theta}',$$

לכן מהשוואת שתי התוצאות ל־ $\vec{a}'$ נקבל

$$[\ddot{r}'-r'(\dot{\theta}'^2+2\omega\dot{\theta}'+\omega^2)]\hat{r}'+(2\dot{r}'\dot{\theta}'+r'\ddot{\theta}'+2\omega\dot{r}')\hat{\theta}'=0$$

או בפרוק לרכיבים

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} \ddot{r}'-r'(\dot{\theta}'+\omega)^2=0 \\ r'\ddot{\theta}'+2\dot{r}'(\dot{\theta}'+\omega)=0 \end{array}\right. .}$$

3. (א) במערכת *הדיסקה* (זיכרו שהכיוונים $\hat{x},\hat{y}$ הם הפעם יחסית לדיסקה) אנו יודעים כי

$$\vec{v}' = \omega R\hat{x}$$

$$\vec{r}' = x_A\hat{x} + y_A\hat{y} + \omega Rt\hat{x},$$

כאשר $x_A, y_A$ הם רכיבי $x, y$ של נקודת המוצא $A$. נתון ש־ $A$ על השפה, כך ש־ $x_A^2 + y_A^2 = R^2$, וכן נתון ש־ $y_A = \frac{1}{2}R$, לכן

$$x_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}R\hat{x} \quad ; \quad y_A = \frac{1}{2}R.$$

אנו יודעים כי במערכת מסתובבת:

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'),$$

כאשר

$$\vec{\omega}\times\hat{x} = \omega\hat{y} \quad ; \quad \vec{\omega}\times\hat{y} = -\omega\hat{x}.$$

את הכח האמיתי $m\vec{a}$ שפועל על המסה $m$ אפשר לרשום בצורה $m\vec{a} = F\hat{x} + N\hat{y}$. נכפיל את המשוואה לתאוצות במסה ונציב את הביטויים האחרונים שרשמנו (יחד עם הביטויים ל־ $\vec{r}', \vec{v}'$ שמצאנו בהתחלה), נקבל

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \frac{F}{m}\hat{x} + \frac{N}{m}\hat{y} - 2\omega v_x'\hat{y} + \omega^2 x\hat{x} + \omega^2 y_A\hat{y} \\ &= \frac{F}{m}\hat{x} + \frac{N}{m}\hat{y} - 2\omega(\omega R)\hat{y} + \omega^2 x\hat{x} + \frac{1}{2}\omega^2 R\hat{y}\end{aligned}$$

כיוון שהמסה נעה במהירות קבועה במערכת הדיסקה, אזי היא לא מאיצה, כך ש־ $\vec{a}' = 0$, וקיבלנו לכן את מערכת המשוואות

$$\frac{F}{m} = \omega^2 x,$$

$$\frac{N}{m} = -\frac{3}{2}\omega^2 R,$$

מצאנו אם כן שהכח $F$ הוא

$$\boxed{F = m\omega^2 x.}$$

שימו לב, שאם נציב $x = (x_A + v_x't) = R(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2})$, נקבל

$$F = m\omega^2 R(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

(ב) את הכח הנורמלי כבר מצאנו למעשה בסעיף הקודם, זהו $N$ שמצאנו.

$$\boxed{\vec{N} = -\frac{3}{2}m\omega^2 R\hat{y}.}$$

(ג) אם הכח לא פועל אזי נקבל משוואות דומות מאוד לאלו שקיבלנו קודם. ההבדל הוא שכעת $F = 0$ (אבל עדיין $N \neq 0$) והמהירות של המסה כעת לא ידועה $\dot{x}$ במקום $\omega R$ מקודם (בכיוון $y$ המהירות היא עדיין אפס). לכן המשוואה לתאוצה היא הפעם

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \frac{F}{m}\hat{x} + \frac{N}{m}\hat{y} - 2\omega v_x'\hat{y} + \omega^2 x\hat{x} + \omega^2 y\hat{y} \\ &= \frac{N}{m}\hat{y} - 2\omega\dot{x}\hat{y} + \omega^2 x\hat{x} + \frac{1}{2}\omega^2 R\hat{y}\end{aligned}$$

רכיב $x$ של המשוואה האחרונה נותן את המשוואה הדיפרנציאלית

$$\ddot{x} = \omega^2 x.$$

הכי קל לפתור את הבעיה באותה שיטה כמו ב־4ב', ולהכפיל את המשוואה ב־ $2\dot{x}$ (שיטת פתרון נוספת בסוף)

$$2\dot{x}\ddot{x} = \omega^2 2x\dot{x} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2\right) = \omega^2\frac{d}{dt}\left(x^2\right).$$

כעת נבצע אינטגרציה על שני הצדדים של המשוואה הימנית ונקבל

$$\dot{x}^2 = \omega^2 x^2 + \mathrm{Const.}$$

את הקבוע נמצא מהצבת תנאי ההתחלה $x(t=0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}R$ ו־ $\dot{x}(t=0)=\omega R$ כך ש־

$$\text{Const.}=(\omega R)^2-\omega^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2=\frac{1}{4}\omega^2R^2,$$

כלומר

$$\dot{x}^2=\omega^2x^2+\left(\frac{1}{2}\omega R\right)^2.$$

כעת, בכדי למצוא את המהירות בנקודה $B$ יש להציב את רכיב $x$ שלה $x_B=0$ במשוואה האחרונה ומקבלים

$$\boxed{\dot{x}_B=+\frac{1}{2}\omega R,}$$

כאשר הסימן נבחר בפלוס כי אנו יודעים שהמסה מגיע מ־$A$ ל־$B$ ולא מ־ $C$ ל־ $A$.
את הבעיה אפשר גם לפתור אחרת. כאמור קיבלנו את המשוואה הדיפרנציאלית

$$\ddot{x}=\omega^2x.$$

הפתרון הכללי של משוואה זו הוא

$$x=\alpha e^{\omega t}+\beta e^{-\omega t}$$

$$\Rightarrow \dot{x}=\omega(\alpha e^{\omega t}-\beta e^{-\omega t})$$

כאשר $\alpha,\beta$ הם קבועים שיש למצוא מתנאי ההתחלה:

$$x(t=0)=x_A=-\frac{\sqrt{3}}{2}R\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\dot{x}(t=0)=\omega R\Rightarrow\alpha-\beta=R$$

אם פעם נחבר את שתי המשוואות ופעם נחסר, נמצא בקלות את $\alpha,\beta$:

$$\alpha=\frac{2-\sqrt{3}}{4}R\quad;\quad\beta=-\frac{2+\sqrt{3}}{4}R$$

ולכן

$$x(t)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}Re^{\omega t}-\frac{2+\sqrt{3}}{4}Re^{-\omega t}=R\sinh\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}R\cosh\omega t$$

$$\Rightarrow\dot{x}(t)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}R\omega e^{\omega t}+\frac{2+\sqrt{3}}{4}R\omega e^{-\omega t}=R\omega\cosh\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega\sinh\omega t$$

בנקודה $B$, $x_B=0$ ולכן

$$0=\frac{2-\sqrt{3}}{4}Re^{\omega t_B}-\frac{2+\sqrt{3}}{4}Re^{-\omega t_B}=R\sinh\omega t_B-\frac{\sqrt{3}}{2}R\cosh\omega t_B$$

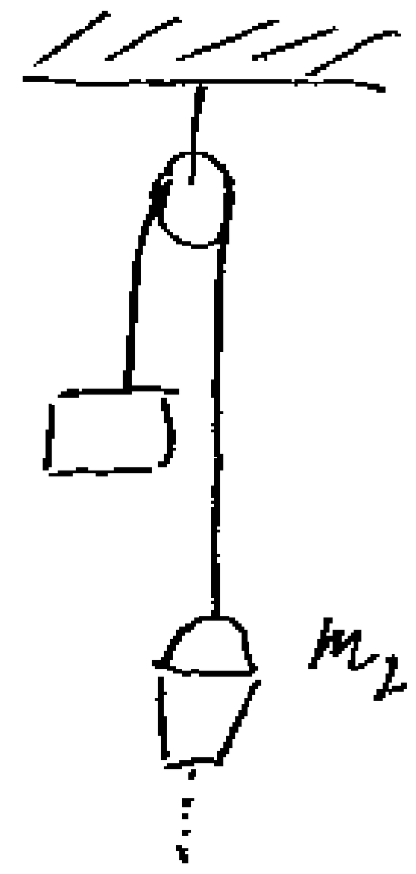
$$\Rightarrow\left(e^{\omega t_B}\right)^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\Rightarrow e^{\omega t_B}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$$

נציב בנוסחה למהירות ונקבל ($e^{-\omega t}=\frac{1}{e^{\omega t}}$)

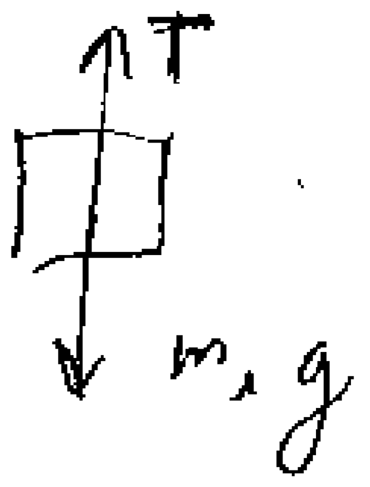
$$\begin{aligned}\dot{x}(t_B)&=\frac{2-\sqrt{3}}{4}R\omega\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\frac{2+\sqrt{3}}{4}R\omega\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\\&=\frac{1}{4}R\omega\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+\frac{1}{4}R\omega\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\\&=\frac{1}{2}R\omega\sqrt{4-3}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו שוב

$$\boxed{\dot{x}(t_B)=\frac{1}{2}R\omega.}$$




הכוחות הפועלים על $m_1$:




I $\quad F_1 = -m_1 g + T = m_1 a$

עבור המסה $m_2$, התנע בזמן $t$:

$$p(t) = m_2 V_2$$

התנע בזמן $t+dt$:

$$p(t+dt) = (m_2+dm_2)(V_2+dV_2) - dm_2(V_2+V_0)$$

(כמות המסה קטנה כלומר $dm_2$ שלילי).

$$dp = p(t+dt) - p(t) = m_2\, dV_2 - dm_2\, V_0$$

$$\frac{dp}{dt} = m_2 \frac{dV_2}{dt} - \frac{dm_2}{dt} V_0$$

$\frac{dp}{dt}$ שווה לכוחות החיצוניים הפועלים על $m_2$.

$$-m_2 g + T = m_2 \frac{dV_2}{dt} - \frac{dm_2}{dt} V_0$$

$\frac{dV_2}{dt} = -a$ מכיוון שתאוצת המסות בכיוונים מנוגדים.

כמו כן נתון $\frac{dm_2}{dt} = -J_0$:

II $\quad T - m_2 g = -m_2 a + J_0 V_0$

נחסיר שתי המשוואות:

$$\mathrm{I}-\mathrm{II}:\quad (m_2-m_1)g=(m_1+m_2)a-J_0V_0$$

$$a=\frac{(m_2-m_1)g+J_0V_0}{m_1+m_2}$$

$J_0$ קבוע ולכן תלות המסה $m_2$ בזמן:

$$m_2=M-J_0t$$

(כאשר $M$ היא מסת $m_2$ בזמן $t=0$).

$$a=\frac{(M-J_0t-m_1)g+J_0V_0}{M-J_0t+m_1}$$

<u>הערה</u>: בחירת הסימנים היא כך ש- $a>0$, $J_0>0$, $V_0<0$,

הגוף $m_2$ נע בתאוצה $-a$ כלומר:

$$\dot{V}_2=a_2=-a=\frac{(m_1-M+J_0t)g-J_0V_0}{M-J_0t+m_1}$$

שאלה 5

א) בדומה לשאלה הקודמת, עבור גוף הפולט מסה:

$$F = \frac{dp}{dt} = M\dot{v} - \frac{dM}{dt}u$$

$$F = -Mg$$

התאוצה הבלון היא $\frac{1}{2}g$ כלומר: $\dot{v} = \frac{1}{2}g$

$$\Rightarrow -Mg = \frac{1}{2}Mg - \dot{M}u$$

$$\Rightarrow \dot{M} = \frac{3}{2}\frac{Mg}{u}$$

$$\Rightarrow M = Ae^{\frac{3g}{2u}t}$$

מתנאי ההתחלה:

$$M(t=0) = (4m+m) = A$$

$$\Rightarrow M = 5m\, e^{\frac{3g}{2u}t}$$

קצב פליטת הגז:

$$\dot{M} = \frac{15mg}{2u} e^{\frac{3gt}{2u}}$$

ב. כאשר יפלט כל הגז מסת המערכת היא מסת הבלון בלבד:

$$M = 5m\, e^{\frac{3g}{2u}t} = m$$

$$\Rightarrow t = -\frac{2u}{3g}\ln 5$$

ג. הבלון עושה עליה בתאוצה $\frac{1}{2}g$. לאורך זמן $t$ (מסעיף ב)

הבלון נמצא בגובה: $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}g\right)t_{up}^2 = \frac{u^2}{9g}(\ln 5)^2$

מהירותו בסוף בזמן זה: $v_0 = \frac{1}{2}g t_{up} = -\frac{u}{3}\ln 5$

בירידה: $-y = v_0 t_{down} - \frac{1}{2}g t_{down}^2$

$$\Rightarrow \quad t_{down} = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gy}}{g}$$

$T = t_{up} + t_{down}$ זמן לחזור לזרוק הכולל הזמן

$$t_{down} = \frac{+\frac{u}{3}\ln 5 - \sqrt{\frac{u^2}{9}(\ln 5)^2 + 2\frac{u^2}{9}(\ln 5)^2}}{g}$$

$$= \frac{\frac{u}{3}\ln 5 - \frac{u}{\sqrt{3}}\ln 5}{g} = \frac{u \ln 5}{g}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$t = t_{down} + t_{up} = \frac{u \ln 5}{3g}\left(1 - \sqrt{3}\right) - \frac{2u}{3g}\ln 5 = -\frac{u \ln 5}{3g}\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

א. בזמן $dt$ הגוף עובר מרחק $vdt$. המסה של האבק:

$$dm_{in} = \rho dV = \rho \cdot A \cdot vdt$$

המסה שנכנסת קודם:

$$\Rightarrow \frac{dm_{in}}{dt} = \rho A V$$

המסה הנפלטת מהכנס שווה למסה הנקלטת:

$$-\frac{dm_{in}}{dt} = \frac{dm_{out}}{dt} = -\rho A V$$

בזמן $t$:

$$P(t) = MV$$

בזמן $t+dt$:

$$P(t+dt) = M(V+dV) - dm(u+V)$$

$$\frac{dP}{dt} = M\frac{dV}{dt} + \rho A V(u+V)$$

על החללית לא פועל כח חיצוני ולכן $\frac{dP}{dt}=0$

המהירות קבועה: ולכן $\frac{dV}{dt}=0$

כלומר מהירות החללית: $V=-u$

ב.

$$\frac{dV}{dt}=a$$

$$\Rightarrow Ma = -\rho A V(u+V)$$

$$a = -\frac{\rho A V(u+V)}{M}$$

ג.

$$\frac{da}{dV} = -\frac{\rho A u}{M} - \frac{2\rho A V}{M} = 0$$

מהירות עבורה התאוצה מקסימלית:

$$\Rightarrow V = -\frac{u}{2}$$

התאוצה המקסימלית:

$$a_{max} = \frac{\rho A u^2}{4M}$$

שאלה 7

א. מסת הטיפה בכל רגע:

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dm}{dt} = 4\rho\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

עפ"י הנתון בשאלה:

$$4\rho\pi r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{dm}{dt} = 4b\pi r^2$$

$$\Rightarrow \rho\frac{dr}{dt} = b$$

$$\Rightarrow r = \frac{b}{\rho}t + r_0$$

ב. על הטיפה פועל כח חיצוני $mg$:

$$mg = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}V + m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow mg = 4b\pi r^2 V + m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{4b\pi r^2 v}{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3} = g - \frac{3bv}{\rho r}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{b}{\rho} = g - \frac{3bv}{\rho r}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = \frac{g\rho}{b} - 3\frac{v}{r}$$

פתרון המשוואה עפ"י ההדרכה $\left(A=-3, B=\frac{g\rho}{b}\right)$!

$$V = \frac{1}{c^3}\cdot\frac{1}{r^3} + \frac{g\rho}{4b}$$

מתנאי ההתחלה:

$$V(r=r_0) = \frac{1}{c^3}\cdot\frac{1}{r_0^3} + \frac{g\rho}{4b}r_0 = 0$$

$$c^3 = -\frac{4b}{g\rho r_0^4}$$

$$V = -\frac{g\rho}{4b}\,\frac{r_0^4}{r^3} + \frac{g\rho}{4b}r$$

$$V = -\frac{g\rho r_0}{4b}\left[\frac{r_0}{r_0+\frac{b}{\rho}t}\right]^3 + \frac{g\rho}{4b}\left(r_0+\frac{b}{\rho}t\right)$$

ב. תאוצת הטיפה:

$$a = \dot{v} = -\frac{g\rho r_0^4}{4b}\cdot(-3)\cdot\frac{1}{\left(r_0+\frac{b}{\rho}t\right)^4}\cdot\frac{b}{\rho} + \frac{g\rho}{4b}\cdot\frac{b}{\rho}$$

$$= \frac{3gr_0^4}{4\left(r_0+\frac{b}{\rho}t\right)^4} + \frac{g}{4}$$

בתחילת התנועה $(t=0\ldots)$:

$$a = \frac{3gr_0^4}{4r_0^4} + \frac{g}{4} = g$$

3. לאחר זמן ארוך:

$$a(t\to\infty) = \frac{g}{4}$$

שאלה 8

א. כאשר הקרונית נעה במהירות $u$ המהירות היחסית בין הסילון לקרונית היא $V_0-u$.
בזמן $dt$ פוגעת בקרונית מים עם מסה:

$$dm=\rho(V_0-u)A\,dt$$

השינוי בתנע הסילון:

$$dp=-\rho(V_0-u)^2A\,dt$$

אין כוחות חיצוניים ולכן:

$$\frac{dp}{dt}=m\dot{u}-\rho(V_0-u)^2A=0$$

$$\Rightarrow \dot{u}=\frac{\rho A}{m}(V_0-u)^2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{(V_0-u)^2}=\frac{\rho A}{m}t$$

$$(V_0-u)^{-1}=\frac{\rho A}{m}t+C$$

$$\Rightarrow u=V_0-\frac{1}{\frac{\rho A}{m}t+C}$$

$$u(t=0)=V_0-\frac{1}{C}=0$$

$$\Rightarrow u=V_0\left[1+\frac{m}{\rho V_0 t}\right]^{-1}$$

ב. המהירות המקסימלית של הקרונית: $u_{max}=V_0$