תרגול 13

תזכורת

אופרטור $T:V\to V$ נקרא:

א. נורמלי אם $T^*T=TT^*$.
ב. אוניטרי אם $T^*=T^{-1}$.
ג. צמוד לעצמו אם $T^*=T$.

משפט

התכונות הבאות שקולות עבור אופרטור:

א. אוניטרי.
ב. שומר מכפלה פנימית: $\langle u,v\rangle=\langle T(u),T(v)\rangle$.
ג. שומר נורמה: $\|T(v)\|=\|v\|$.
ד. שומר מרחקים: $\|T(u-v)\|=\|u-v\|$.

דוגמא

ההעתקה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T(v)=Av$ כאשר $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ נשים לב שאכן

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה אוניטרית.

נראה שאכן המשפט מתקיים עבור וקטורים $u=(1,2),v=(-1,0)$.

ז"א נראה ש $\langle u,v\rangle=\langle T(u),T(v)\rangle$, $\|T(v)\|=\|v\|$, $\|T(u-v)\|=\|u-v\|$.

נשים לב שניתן לרשום את המטריצה באופן הבא: $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$ והמשמעות היא סיבוב

של $\frac{\pi}{6}$ רדיאנים של כל וקטור.

ניתן באותו אופן להגדיר מטריצה אוניטרית עבור כל זווית θ $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

זווית במרחב מכפלה פנימית

הסקלר היחידי $0\le\theta\le\pi$ שמקיים $\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

<u>דוגמא</u>

נתבונן במכפלה הפנימית הבאה במרחב $\mathbb{R}[x]$ (כל הפולינומים הממשיים) המוגדר ע"י

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx .$$

נמצא את הזווית בין הפונקציה $f(x)=x+1, g(x)1-x^7$.

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}(x+1)\left(1-x^7\right)dx=\frac{16}{9} .$$

$$\|f\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx}=\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$\|g\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(1-x^7\right)^2\,dx}=\sqrt{\left[x-\frac{x^8}{4}+\frac{x^{15}}{15}\right]_{-1}^{1}}=\sqrt{\frac{32}{15}}$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{16}{9}}{\sqrt{\frac{256}{45}}}=\frac{\sqrt{45}}{9}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\theta=41.81^0 .$$

<u>טענה</u>

לכל מטריצה ריבועית $A\in F^{n\times n}$, המכפלה הפנימית הסטנדרטית על F^n מקיימת $\langle Au,v\rangle=\langle u,A^*v\rangle$.

אם A מטריצה נורמלית אז $Av=\lambda v \Leftarrow A^*v=\bar{\lambda}v$.

<u>מסקנה</u>

אם A מטריצה נורמלית אז וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם מאונכים.

<u>משפט</u>

כל מטריצה נורמלית עם פולינום אופייני מתפרק לגורמים ליניאריים היא לכסינה אוניטרית, ולהפך.

<u>תרגיל</u>

מצא את המטריצה האוניטרית המלכסנת את $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

מהמסקנה נקבל שהוקטורים העצמיים עבור ערכים עצמיים שונים מאונכים.

נמצא את הפולינום האופייני

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-1)^2+1 = (\lambda-1-i)(\lambda-1+i).$$

המרחב העצמי עבור $\lambda_1 = 1+i$ הוא $V_{\lambda_1} = Sp\{(1,-i)\}$ הבסיס האורתונורמלי של $V_{\lambda_1} = Sp\{(1,-i)\}$ הוא $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

המרחב העצמי עבור $\lambda_2 = 1-i$ הוא $V_{\lambda_1} = Sp\{(1,i)\}$ הבסיס האורתונורמלי הוא $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

נרשום את איברי הבסיס בעמודות ונקבל את המטריצה האוניטרית המלכסנת

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$