הרצאה 18

03.08.2016

נכתב על ידי נועם יערי

משוואות לינאריות מסדר 2

בהינתן משוואה לינארית הומוגנית מסדר 2, האם ניתן למצוא פתרון אחד?

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

תזכורת

$f(x)$ נקראת אנליטית בסביבה של $x_0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

בסביבה פתוחה של x_0. בנוסף, אם f אנליטית:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

משפט

למשוואה לינארית עם מקדמים אנליטיים בצורה נורמלית, הפתרונות הם גם כן אנליטיים.

הערה

בגדול המטרה היא "לנחש" את צורת הפתרון כטור חזקות ולחשב את המקדמים.

הערה

תנאי התחלה נותנים לנו את האיברים הראשונים בטור.

דוגמה

$$y'' + y = 0$$

נציב: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Longrightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\big)x^n = 0$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \ \ (n+2)(n+1)a_{n+2} = -a_n$$

$$\Longrightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} a_{2n} & = & \dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)!} \\ a_{2n+1} & = & \dfrac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} \end{matrix}, \begin{matrix} a_0 & = & y(0) \\ a_1 & = & y'(0) \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = y(0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + y'(0) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = y(0) \cdot \cos x + y'(0) \cdot \sin x}$$

דוגמה

$$\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \Leftrightarrow xy' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+1)(n+2)a_{n+2} + na_n + 2a_n\big)x^n$$

$$\Longrightarrow (n+1)(n+2)a_{n+2} = -(n+2)a_n$$

$$\Longrightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{2n} = 0 \ \ (\text{בגלל תנאי ההתחלה})$$

$$\Longrightarrow a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n)!!} = \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot (2n)} = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$$

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2^n} = xe^{-\frac{x^2}{2}}}$$