משפט סקוטס

תרגיל

יהי V התחום החסום בין שני גלילים ברדיוסים 1 ו2(שמרכזם בציר z) הנמצא באוקטן החיובי, ומתחת למישור $z=2$.
תהי $\omega = -y^3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + x^3\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. חשב את $\int_{\partial V}\omega$.

פתרון

(כשלא אומרים האוריינטציה חיובית)
פתרון ישיר ידרוש פרמטריזציה של ∂V המורכבת משישה משטחים(!), ולכן נעדיף להפעיל את משפט סטוקס:

$$\int_{\partial V}\omega = \int_V \mathrm{d}\omega$$

נחשב את אגף ימין

$$\mathrm{d}\omega = -3y^2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + 3x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 3\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

נמצא פרמטריזציה עבור V באמצעות קואורדינטות גליליות:

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \Omega & \to & V \\ & (r,\theta,z) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{array}$$

$$\Omega = \left\{ (r,\theta,z) \,\middle|\, \begin{array}{c} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le z \le 2 \end{array} \right\}$$

נחשב את הPullback:

$$\varphi_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \qquad \varphi_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \qquad \varphi_z = (0,0,1)$$

$$\varphi^*\mathrm{d}\omega = 3\left((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}z =$$

$$= 3r^2 \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z = 3r^3\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \int_V \mathrm{d}\omega = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 3r^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \int_1^2 3r^2 \,\mathrm{d}r =$$
$$= \pi \cdot \frac{3}{4} r^4 \Big|_{r=1}^{r=2} = \boxed{\frac{45\pi}{4}} = \int_{\partial V} \omega$$

המשך תרגיל

חשב את האינטגרל $\int_S \omega$ כאשר S הוא המשטח שמהווה את כל ∂V פרט לבסיס התחתון.

פתרון

נסמן בB את הבסיס התחתון.
S כבר לא כולא תחום תלת מימדי ־ ומשפט סטוקס לא ישים כמו מקודם. בכדי לחשב את $\int_S \omega$ צריכים 5 פרמטריזציות.

"טריק": $\int_S \omega + \int_B \omega = \int_{\partial V} \omega = \frac{45\pi}{4}$

B נתון באוריאנטציה המתאימה. נמצא פרמטריזציה עבור B.

$$\psi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \qquad \begin{matrix} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

נגזרות חלקיות:

$$\psi_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\psi_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\psi^*\omega = \left[-(r\sin\theta)^3 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \begin{pmatrix} \psi_\theta \\ \psi_r \end{pmatrix} + (r\cos\theta)^3 \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \begin{pmatrix} \psi_\theta \\ \psi_r \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}r = 0$$
$$\Rightarrow \int_B \omega = \iint_{[1,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \psi^*\omega = 0$$
$$\Rightarrow \int_S \omega = \frac{45}{4}\pi$$

תרגיל

במישור נתון מרובע שקודקודיו $(0,4), (2,3), (1,1), (-1,0)$. נסמן ב$D$ את התחום שבתוך המרובע.
נתונה התבנית

$$\omega = 2xy^3 \,\mathrm{d}x + 3x^2y^2 \,\mathrm{d}y \qquad \left(= \mathrm{d}\left(x^2y^3\right)\right)$$

חשב את $\int_{\partial D} \omega$.

פתרון

נעזר במשפט סטוקס:

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{D}\mathrm{d}\omega=\int_{D}0$$

נניח שלא שמנו לב:

$$\mathrm{d}\omega=\left(\cancel{2y^{3}\,\mathrm{d}x}+6xy^{2}\,\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}x+\left(6xy^{2}\,\mathrm{d}x+\cancel{6x^{2}y\,\mathrm{d}y}\right)\wedge\mathrm{d}y=$$

$$=6xy^{2}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+6xy^{2}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$$

מסקנה: $\int_{\partial D}\omega=0$ לא תלוי בD!

המשך

נסמן בγ_1 את העקומה הנמצאת על החלק העליון של הריבוע המחבר בין $(-1,0)$ ל$(1,1)$ בכיוון תנועה זה. חשב $\int_{\gamma_1}\omega$.

פתרון

נסמן בγ_2 את הצלע התחתונה בכיוון ההפוך

$$\int_{\gamma_1}+\int_{-\gamma_2}=\int_{\partial D}\omega=0$$

מסקנה:

$$\int_{\gamma_1}\omega=\int_{\gamma_2}\omega$$

פרמטריזציה:

$$\gamma_2\left(t\right)=\left(-1,0\right)+t\cdot\left(2,1\right)=\left(2t-1,t\right)$$

$$\gamma_2'\left(t\right)=\left(2,1\right)$$

$$\gamma_2^{*}\omega=\ldots$$

דרך אחרת - משפט סטוקס

$$\partial\gamma_1 = \left\{ \underbrace{(-1,0)}_{-}, \underbrace{(1,1)}_{+} \right\}$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} \mathrm{d}\left(x^2 y^3\right) = \int_{\partial\gamma_1} x^2 y^3 =$$

$$= f(1,1) - f(-1,0) = 1^2 \cdot 1^3 - (-1)^2 \cdot 0^2 = \boxed{1}$$