שיעורי בית 2

10 בנובמבר 2015

1. תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g_1,g_2\in G:(g_1g_2)^2=g_1^2g_2^2$.
הוכח כי G חבורה חילופית.
פתרון : יהיו $g_1g_2\in G$. לפי נתון מתקיים

$$g_1\left(g_2g_1\right)g_2=\left(g_1g_2\right)\left(g_1g_2\right)=\left(g_1g_2\right)^2=g_1^2g_2^2=g_1\left(g_1g_2\right)g_2$$

נכפיל את השיוויון ב g_1^{-1} משמאל וב g_2^{-1} מימין ונקבל כי $g_2g_1=g_1g_2$.

2. הוכח: תהא G חבורה. אזי המרכז שלה $Z(G)$ ג"כ חבורה (ביחס לאותה פעולה של G)
פתרון : הוכחה: סגירות־ יהיו $g_1,g_2\in Z(G)$ אזי $\forall x\in G:g_1g_2x=g_1xg_2=xg_1g_2$ ולכן גם $g_1g_2\in G$

יחידה־ קיימת

קיבוציות ־ מתקיים מירושה מ G

הופכי־ יהיה $g\in Z(G)$ אזי $\forall x\in G:gx=xg\Rightarrow xg^{-1}=g^{-1}x$ ולכן $g^{-1}\in Z(G)$

3. הגדרה: הסימן של תמורה $\sigma\in S_n$ הוא $(-1)^{\#\{(i,j):\,i<j\,\wedge\sigma(i)>\sigma(j)\}}$.

משפט: הסימן של תמורה שווה גם ל $(-1)^k$ כאשר k הוא מספר החילופים המופיעים בהצגת התמורה כמכפלה של חילופים (וזה לא תלוי בהצגה).

למשל הסימן של $(1,3,5,6)=(1,3)\,(3,5)\,(5,6)$ הוא $-1=(-1)^3$. הסימן של תמורה הזהות הוא $(-1)^0=1$

הסימן של $(1,2,3)=(1,2)\,(2,3)$ הוא $(-1)^2=1$.

הגדרה: תמורה שסימנה 1 נקראת תמורה זוגית. תמורה שסימנה 1־ נקראת תמורה אי־זוגית. קבוצת התמורות הזוגיות מסומנת כ A_n והיא חבורה ביחס להרכבה.

(א) הוכח כי התמורות האי־זוגיות אינן חבורה (ביחס להרכבה) עבור $n>2$.
פתרון : התמורות $(1,2)\,,(2,3)$ הן תמורות א"ז אבל הכפל בינהם הוא זוגי.

(ב) כמה איברים יש ב A_n ($n>1$)?

רמז: הראו כי ב A_n יש אותו מספר איברים כמו ב $S_n \setminus A_n$ (התמורות האי זוגיות) ע"י מציאת פונקציה חח"ע ועל (שזה שקול לכך שהיא הפיכה) $f: S_n \setminus A_n \to A_n$. בנוסף, שימו לב כי כי $S_n = (S_n \setminus A_n) \cup A_n$

פתרון : נגדיר פונקציה $f: S_n \setminus A_n \to A_n$ ע"י

$$\sigma \mapsto (1,2)\,\sigma$$

שימו לב כי אם σ תמורה א"ז אזי $(1,2)\,\sigma$ תמורה זוגית! (כי הוספנו עוד חילוף אחד)

כעת הפונקציה f חח"ע כי אם $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$ זה אומר $(1,2)\,\sigma_1 = (1,2)\,\sigma_2$ וע"י כפל משמאל ב $(1,2)$ נקבל כי $\sigma_1 = \sigma_2$.

בנוסף f על כי המקור של תמורה זוגית τ תהיה התמורה הא"ז $(1,2)\,\tau$ (אכן $(1,2)\,\tau \mapsto (1,2)\,(1,2)\,\tau = \tau$)

לכן מספר האיברים בשני הקבוצות שווה. כיוון ש $|S_n| = n!$ נקבל כי $|A_n| = \frac{n!}{2}$

(ג) כתוב מפורשות את A_2, A_3.

פתרון : נחשב

$$A_2 = \{id\}$$

$$A_3 = \{id, (1,2)\,(2,3)\,, (1,3)\,(2,3)\} = \{id, (1,2,3)\,, (1,3,2)\}$$

(ד) מצא את המרכז של $(1,2,3) = (1,2)\,(2,3) = \sigma$ ב A_5 מפורשות (כלומר, כתוב את כל האיברים במרכז)

פתרון : צריכים למצוא את כל $\sigma \in A_5$ המקיימות $\sigma\,(1,2,3) = (1,2,3)\,\sigma$ או באופן שקול

$$\sigma\,(1,2,3)\,\sigma^{-1} = (1,2,3)$$

לפי ש.ב. $\sigma\,(1,2,3)\,\sigma^{-1} = (\sigma\,(1), \sigma(2), \sigma(3))$ ולכן מהשיוון

$$(1,2,3) = (\sigma\,(1), \sigma(2), \sigma(3))$$

אם $\sigma \neq id, (1,2,3)\,, (1,3,2) = (1,2,3)^i$ אזי בפירוק למחזורים זרים $\sigma = \tau\,(1,2,3)^i$ כאשר τ זר ל $(1,2,3)$. המחזור היחידי שזר ל$(1,2,3)$ הוא $(4,5)$ כיוון ש $(1,2,3)^i\,(4,5) \notin A_5$ נקבל כי

$$C\,((1,2,3)) = \{id, (1,2,3)\,, (1,3,2)\}$$

(ה) הוכח כי המרכז של A_n , כלומר $C(A_n)$ שווה ל $C(A_n) = \{id\}$ עבור $n \geq 4$

פתרון : במקרה של $n \geq 4$: נניח שקיימת $id \neq \sigma \in C(A_n)$. מכאן שקימיים i, j כך ש $\sigma(j) = i \neq j$ נגדיר $\tau = (i,j)\,(k,l) \in A_n$ כולם שונים זה מזה ($n \geq 4$).

מהגדרת המרכז צריך להתקיים $\sigma\tau = \tau\sigma$. מתקיים $\tau\sigma(j) = \tau(i) = j$ ו־ $\sigma\tau(j) = \sigma(i)$ ולכן $\sigma(i) = j$ לכן החילוף (i,j) מופיע בפירוק של σ למחזורים זרים. כיוון ש $\sigma \in A_n$ יש לה עוד מחזור נניח שהוא מתחיל ב $(s, \ldots)$.

נגדיר $\tau' = (j,i)\,(i,s) = (j,i,s) \in A_n$ כולם שונים זה מזה

מהגדרת המרכז צריך להתקיים $\sigma\tau' = \tau'\sigma$. מתקיים $\tau'\sigma(s) = \tau'(\sigma(s))$ ו־ $\sigma\tau'(s) = \sigma(j) = i$ ולכן $\tau'(\sigma(s)) = i$ כלומר $\sigma(s) = j$ אבל $\sigma(j) = i$! סתירה.

מסקנה $C(A_n) = \{id\}$