תרגיל 7 אינפי 4 - פתרון

1. אפשר לקחת פרמטריזציה כזאת למשטח:

$$\varphi(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

כדי לחשב את האינטגרל צריך לחשב את הגורם

$$||\varphi_\theta \times \varphi_z||$$

במקרה שלנו

$$\varphi_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$
$$\varphi_z = (0, 0, 1)$$

קל לחשב

$$\varphi_\theta \times \varphi_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

ולכן

$$||\varphi_\theta \times \varphi_z|| = 1$$

אז לפי הנוסחא הרגילה האינטגרל שלנו הוא בעצם

$$\int\limits_S f\mathrm{d}S = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi(\theta, z))||\varphi_\theta \times \varphi_z||\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \pi$$

וזהו.

2. לפי הנתונים די ברור שאפשר לתת למשטח פרמטריזציה כזאת

$$\varphi(x, y) = (x, y, y, x^2 + 2y^2)$$

כאשר

$$x^2 + 2y^2 \le 1$$

נחשב

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$$

ולכן

$$D_\varphi^t D_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 1 & 4y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2x & 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4x^2 & 8xy \\ 8xy & 2+16y^2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\det D_\varphi^t D_\varphi = 2 + 8x^2 + 16y^2 = 2(1+4x^2+8y^2)$$

נשים לב שלפי הפרמטריזציה שלנו

$$f(\varphi(x,y)) = \sqrt{1+4x^2+8y^2}$$

ולכן

$$\int\limits_{x^2+2y^2\le 1} \sqrt{1+4x^2+8y^2}\cdot\sqrt{2(1+4x^2+8y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2} \int\limits_{x^2+2y^2\le 1} (1+4x^2+8y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

עכשיו נבצע כצפוי החלפת משתנים פולרית

$$x = r\cos t$$
$$y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin t$$

ונשים לב שהיעקוביאן במקרה זה הוא

$$\frac{r}{\sqrt{2}}$$

ולכן האינטגרל שלנו שווה ל

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{1} r(1+4r^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (1+4r^2)\Big|_0^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = \pi$$

3. פרמטריזציה למשטח

$$M \times N$$

מתקבלת על ידי הפונקציה

$$g(x,y) \to (\varphi(x), \psi(y))$$

כאשר x, y הם וקטורים כמובן. אם M משטח ממימד m ו Nמשטח ממימד n אז X וקטור m מימדי ו y וקטור n מימדי. בלי להיכנס לפרטים טכניים. ברור של D_g יש צורת בלוקים כזאת:

$$D_g(x,y) = \begin{pmatrix} D_\varphi(x) & 0 \\ 0 & D_\psi(y) \end{pmatrix}$$

ולכן

$$D_g^t(x,y)D_g(x,y) = \begin{pmatrix} D_\varphi^t(x)D_\varphi(x) & 0 \\ 0 & D_\psi^t(y)D_\psi(y) \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\sqrt{\det D_g^t(x,y)D_g(x,y)} = \sqrt{\det D_\varphi^t(x)D_\varphi(x)}\sqrt{\det D_\psi^t(y)D_\psi(y)}$$

אם נסמן ב A את התחום של φ ו ב B את התחום של ψ אז ממילא נקבל ש

$$\begin{aligned} S(M\times N) &= \int\limits_{A\times B} \sqrt{\det D_g^t(x,y)D_g(x,y)} = \int\limits_{A\times B} \sqrt{\det D_\varphi^t(x)D_\varphi(x)}\sqrt{\det D_\psi^t(y)D_\psi(y)} \\ &= \int\limits_A \sqrt{\det D_\varphi^t(x)D_\varphi(x)} \int\limits_B \sqrt{\det D_\psi^t(y)D_\psi(y)} \\ &= S(M)S(N) \end{aligned}$$

כנדרש.

4. לפי משפט הפונקציה הסתומה, אפשר לבטא את x_n באמצעות שאר המשתנים, כלומר, אפשר לבטא את המשטח בצורה של

$$\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}) = (x_1,\ldots,x_{n-1},f(x_1,\ldots,x_{n-1}))$$

כאשר $x_1,\ldots,x_{n-1} \in A$ קבוצה כלשהיא. עכשיו, לפי נוסחא שראינו בכיתה זה אומר שנפח המשטח הוא

$$\int\limits_A \sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{n-1}))^2}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}$$

לפי משפט הפונקציה הסתומה אנחנו יודעים ש

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}$$

אם נציב זאת בנוסחא למעלה נקבל

$$\begin{aligned} \int\limits_A \sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_n}}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n))^2}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} &= \int\limits_A \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n))^2}}{|\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)|}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} \\ &= \int\limits_A \frac{||\nabla g||}{|\frac{\partial g}{\partial x_n}|}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} \end{aligned}$$

שזה מה שרצינו.