לינארית להנדסה- פתרון תרגיל

תרגיל. נתונים הווקטורים

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},v_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},v_5=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$$

1. השלימו את $\{v_1,v_2\}$ כך שיהיה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

פתרון. אנחנו צריכים למצוא וקטור $v\notin sp\{v_1,v_2\}$ כדי לעשות זאת בקלות נעבור להצגה של משוואות

$$\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&y\\1&2&z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&y\\0&1&z-x\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&x\\0&1&y\\0&0&z-x-y\end{pmatrix}$$

כלומר

$$sp\{v_1,v_2\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}|z-x-y=0\right\}$$

לכן נבחר וקטור **שלא** מקיים את התנאי הנ״ל למשל $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. מצאו בסיס ל- $Sp\{v_1,v_2,v_4,v_5\}$ והשלימו אותו לבסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

פתרון. ראשית יש צורך לצמצם ווקטורים שתלויים לינארית נבצע זאת בשני דרכים (למעשה זאת אותה דרך בשינוי הדרת)

אופציה ראשונה: נסדר את v_1,v_2,v_4,v_5 כווקטורי עמודה במטריצה ונמצא בסיס ל- $C(A)$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-4\\1&2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-4\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-4\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

יש איברים מובילים בעמודות 1,2,4 , לכן בסיס למרחב העמודות הן העמודות המקוריות של המטריצה כלומר, בסיס ל- $Sp\{v_1,v_2,v_4,v_5\}$ הוא $\{v_1,v_2,v_5\}$ וזה כבר בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

אופציה שנייה: יהי צירוף לינארי שנותן 0 , כלומר

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+a_5\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&3&-1&2&0\\0&1&1&2&-4&0\\1&2&4&1&1&0\end{array}\right)\to\ldots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&2&0\\0&1&2&-4&0\\0&0&0&3&0\end{array}\right)$$

הפתרון הכללי של המשוואה היא $\begin{pmatrix}3t\\-2t\\t\\0\end{pmatrix}$ אם נבחר $t=1$ נקבל $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ פותר את המערכת כלומר

$$3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

לכן $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=v_3$ תלוי בשאר הווקטורים ולכן ניתן להוריד אותו.

למעשה ניתן תמיד ניתן להוריד את הווקטורים שמייצגים משתנים חופשיים.