

תרגיל בית 4 אינפי 3

1. תהי קבוצה קומפקטית. פונקציה $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי

$$f(x, y) = x^2 + \cos^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right)$$

(מן הסתם נקודות בהן $y = 0$ לא נמצאות ב E) הוכיחו כי קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $(x, y) \in E$ מתקיים $M \leq f(x, y)$.

פתרון. היות ש f רציפה על קבוצה קומפקטית אנחנו יודעים שלפונקציה f קיים מינימום ב E . נסמן את ערך המינימום ב M . לכן קיים $x_0 \in E$ כך ש $f(x_0) = M$ ולכל $x \in E$ מתקיים כי $f(x) \geq M$. כמו כן, ברור ש

$$f(x, y) = x^2 + \cos^2 e^{\frac{x}{y}} \geq 0$$

נניח שקיימים x, y עבורם

$$f(x, y) = x^2 + \cos^2 e^{\frac{x}{y}} = 0$$

זה בהכרח אומר ש

$$x^2 = 0 \quad \cos^2 e^{\frac{x}{y}} = 0$$

אבל זה מכריח ש $x = 0$ ובמצב זה

$$\cos^2 e^{\frac{x}{y}} = \cos^2 1 \neq 0$$

לכן לא קיימים x, y עבורם $f(x, y) = 0$ ולכן בהכרח $f(x, y) > 0$. מכאן ברור ש $f(x_0) = M > 0$ ולכן M מקיים את הדרוש.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: תהי פונקציה המוגדרת על תחום D , רציפה במ"ש לפי x (כלומר לכל y' הפונקציה $g(x) = f(x, y')$ רציפה במ"ש) ורציפה במ"ש לפי y (כלומר לכל x' הפונקציה $h(y) = f(x', y)$ רציפה במידה שווה). אזי רציפה $f(x, y)$ ב D .

פתרון. הפרכה: ניקח את הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

המוגדרת נניח על המלבן $[-1, 1] \times [-1, 1]$. ראינו כבר שהפונקציה $f(x, y)$ לא רציפה (לוקחים מסלולים שונים וכו') מצד שני נסתכל על הפונקציה

$$f(x, y')$$

אם $y' \neq 0$ אז

$$f(x, y') = \frac{xy'}{x^2 + (y')^2}$$

וזה בוודאי רציף ולכן רציף במ"ש בתחום $-1 \leq x \leq 1$. אם $y' = 0$ אז

$$f(x, 0) = 0$$

וזה בוודאי רציף במ"ש. באותו אופן מראים כי

$$f(x', y)$$

רציפה במ"ש וזו דוגמה נגדית.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: תהי $f(x, y)$ פונקציה המוגדרת על תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$, רציפה לפי x (כלומר לכל y' הפונקציה $g(x) = f(x, y')$ רציפה) וכן קיים M כך שלכל x' מתקיים $\|f(x', y_1) - f(x', y_2)\| \leq M|y_1 - y_2|$ אזי רציפה $f(x, y)$ ב D .

נכון. תהי (x_0, y_0) נקודה כלשהיא ב D . יהי $\epsilon > 0$ ראשית נשים לב ש

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| &= \|f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\| \\ &\leq \|f(x, y) - f(x, y_0)\| + \|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\| \\ &\leq M|y - y_0| + \|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\| \end{aligned}$$

לפי הרציפות לפי x , קיים δ_1 שעבורו אם

$$|x - x_0| \leq \delta_1$$

אז מתקיים

$$\|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

נבחר

$$\delta < \min\left\{\frac{\epsilon}{2M}, \delta_1\right\}$$

ואז אם

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta$$

אז מתקיים בוודאי ש

$$|x - x_0| \leq \delta \leq \delta_1$$

ולכן

$$\|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)\|$$

וכן מתקיים

$$|y - y_0| \leq \delta \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

ולכן

$$M|y - y_0| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

אז בסך הכל

$$\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

4. האם הפונקציה $f(x, y) = \cos \frac{1}{1-x^2-y^2}$ רציפה במידה שווה על התחומים הבאים?

(א)

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

פתרון. לא. נבחר את הסדרה $a_n = (\sqrt{1 - \frac{1}{\pi n}}, 0)$ ואת הסדרה $b_n = (\sqrt{1 - \frac{1}{\pi(n+1)}}, 0)$. ברור ש $a_n, b_n \in D_1$.

$$a_n \rightarrow (1, 0) \quad b_n \rightarrow (1, 0)$$

ולכן ממילא

$$\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$$

אבל

$$f(a_n) = \cos \pi n \quad f(b_n) = \cos \pi(n+1)$$

ולכן

$$\|f(a_n) - f(b_n)\| = \|\cos \pi n - \cos \pi(n+1)\| = \|(-1)^n 2\| = 2$$

ולכן הפונקציה לא מתכנסת במידה שווה על תחום זה.

(ב)

$$D_2 = \{(x, y) \mid 3 < x^2 + y^2 < 4\}$$

פתרון. כן. נרחיב את תחום ההגדרה לתחום ההגדרה

$$\{(x, y) \mid 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

זוהי קבוצה סגורה וחסומה ו f רציפה בתחום זה ולכן היא גם רציפה במידה שווה עליו. ממילא f רציפה במידה שווה על D_2 .

5. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - \frac{x}{y} \quad (\text{א})$$

פתרון. i. נגזרת לפי x :

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - \frac{1}{y}$$

מוגדרת בכל נקודה שבה f מוגדרת כלומר כל נקודה שבה $y \neq 0$.

ii. נגזרת לפי y :

$$f'_y(x, y) = 6y + \frac{x}{y^2}$$

גם כן מוגדרת בכל נקודה שבה $y \neq 0$.

$$f(x, y) = e^{\cos(xy)} \quad (\text{ב})$$

פתרון. i. נגזרת לפי x :

$$f'_x(x, y) = e^{\cos(xy)} \sin(xy)y$$

ii. ובאופן סימטרי נגזרת לפי y היא

$$f'_y(x, y) = e^{\cos(xy)} \sin(xy)x$$

שתיהן מוגדרות בכל \mathbb{R}^2 .

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{ג})$$

פתרון. נגזרת לפי x :

$$f'_x(x, y, z) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

באופן סימטרי הנגזרות לפי y, z הן:

$$f'_y(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f'_z(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

כל הנגזרות מוגדרות ב $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

$$f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 - z^3) \quad (\text{ד})$$

פתרון. i. נגזרת לפי x :

$$f'_x(x, y, z) = \frac{1}{x^3 + y^3 - z^3} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 + y^3 - z^3}$$

ii. בדומה

$$f'_y(x, y, z) = \frac{3y^2}{x^3 + y^3 - z^3}, \quad f'_z(x, y, z) = \frac{-3z^2}{x^3 + y^3 - z^3}$$

כל הנגזרות מוגדרות בנקודות שבהן $x^3 + y^3 - z^3 > 0$

6. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הן רציפות?

פתרון. יש להפריד בין הנגזרת ב $(0, 0)$ לנגזרת במקומות אחרים. בכל נקודה שהיא לא $(0, 0)$:

$$f'_x(x, y) = \frac{4xy(x^2 + y^2) - 2x(2x^2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^3y + 4xy^3 - 4x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{2x^2(x^2 + y^2) - 2y(2x^2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^4 - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

בנקודה $(0, 0)$ נקבל:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

לכן הנגזרות החלקיות הן:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

כעת נותר לבדוק את רציפותן ב $(0, 0)$. עבור f'_x נוכל להתקדם על ישר $x = y$.
ולקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, x) = \frac{4x^4}{(2x^2)^2} = 1 \neq 0$$

ולכן f'_x לא רציפה ב $(0, 0)$. עבור f'_y נתקדם על הישר $y = 0$ ונקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_y(x, 0) = \frac{2x^4}{(x^2)^2} = 2 \neq 0$$

ולכן גם f'_y לא רציפה ב $(0, 0)$.