תורת הגרפים - הרצאה 6

4 בדצמבר 2011

גרפים מישוריים

הגדרה

גרף G נקרא גרף מישורי אם הוא ניתן לשיכון ב$\mathbb{R}^2$ ללא חיתוך צלעות לא טריוויאלי.

הגדרה

שיכון של גרף ללא חיתוך צלעות לא טריוויאלי נקרא שיכון נאות.

הערה

חיתוך צלעות טריויאלי פירושו חיתוך בקדקד משותף.

דוגמה

$G = K_4$ גרף מישורי כי יש לו שיכון נאות.

מוטיבציה

1. אנו יודעים שב$\mathbb{R}^3$ כל גרף ניתן לשיכון נאות.
   שאלה טבעית - מה קורה ב$\mathbb{R}^2$?
2. הבנה גאומטרית של גרפים
3. גרפים של פאונים הם גרפים מישוריים - קוביה, דודקהדר.
   גרפים מישוריים מכלילים את המושג גרף של פאון.
4. גרפים מישוריים שימושיים באלקטרוניקה (מעגלים חשמליים ועוד).

שאלת היסוד

מי הם הגרפים המישוריים? מה הן תכונותיהם? בהינתן גרף, האם הוא מישורי?

הגדרה

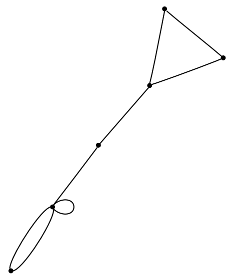
בהינתן שיכון נאות של גרף מישורי, פאה היא תחום "קשיר" במישור $\mathbb{R}^2$ פחות השיכון הנאות ("קשיר" פירושו יש מסילה רציפה מכל נק' בתחום לנק' אחרת בו).

הערה

לכל שיכון נאות של גרף מישורי סופי יש פאה אחת אינסופית.

דוגמה

לגרף הבא יש 4 פאות:



שימו לב - מדברים על פאות רק כאשר יש שיכון נאות.

משפט הפאון של אוילר

יהי G גרף קשיר מסדר n עם m צלעות. אם G מישורי, אז בכל שיכון נאות שלו מס' הפאות f מקיים:

$$n-m+f=2$$

הוכחה

באינדוקציה על מס' הפאות f.
אם $f=1$ אז בG אין מעגלים, לולאות או ריבוי צלעות, כלומר G קשיר ללא מעגלים לכן G עץ ולכן $m=n-1$ ואז $n-m+f=2$.
נניח נכונות עבור כל שיכון נאות של גרף מישורי קשיר עם פחות מf פאות.
יהי G גרף מישורי שלו יש שיכון נאות עם f פאות. ניתן להניח $f>1$ (אחרת, הוכחנו לעיל).
בשיכון יש יותר מפאה אחת והגרף סופי לכן יש בו פאה סופית ולכן יש בו מעגל (במובן הרחב - כולל לולאות וריבוי צלעות).
יש צלע e על המעגל. צלע זו גובלת בשתי פאות שונות T וS.
נתבונן בגרף $G\backslash e$ - יש לו שיכון נאות המתקבל מהשיכון של G אחרי השמטת השיכון של e.
נסמן n - מס' קדקדי G וm - מס' צלעות G, f - מס' הפאות בשיכון הנאות של G.
$n^{'}$ - מס' קדקדי $G\backslash e$, $m^{'}$ - מס' צלעות $G\backslash e$, $f^{'}$ - מס' הפאות בשיכון הנאות של $G\backslash e$.
כיוון שמורידים את e שגובלת בשתי פאות, נקבל ששתי הפאות S וT מתלכדות בשיכון החדש לכן:

$$\begin{aligned} n^{'} &= n \\ m^{'} &= m-1 \\ f^{'} &= f-1 \end{aligned}$$

קיבלנו $f^{'}<f$ לכן לפי הנחת האינדוקציה:

$$\begin{aligned} n^{'}-m^{'}+f^{'} &= 2 \\ n-(m-1)+(f-1) &= 2 \\ n-m+1+f-1 &= 2 \\ n-m+f &= 2 \end{aligned}$$

מסקנה

מס' הפאות בלתי תלוי בשיכון הנאות.

תרגיל

יהי G גרף מישורי מסדר n עם m צלעות, $k(G)$ מס' רכיבי הקשירות של G, הוכח: לכל שיכון נאות של G במישור:

$$n-m+f=k(G)+1$$

כאשר f מס' הפאות בשיכון.

רמז

על כל רכיב קשירות אפשר להחיל את משפט אוילר, ואז יש לבדוק על אילו פאות חזרנו פעמיים.

שאלה

האם K_5 מישורי?

הערה

משפט הפאון של אוילר לפי ניסוחו הרגיל אינו מספק קריטריונים לבחינה האם גרף נתון מישורי. (מדוע? כי הוא מניח שהגרף מישורי).
אבל ניתן להסיק ממשפט זה אמות-מידה לנ"ל.

מסקנות ממשפט הפאון של אוילר

מסקנה 1

לכל גרף מישורי פשוט קשיר מסדר $n \geq 3$ עם m צלעות מתקיים:

$$m \leq 3n - 6$$

הוכחה

יהי G מישורי פשוט קשיר מסדר $n \geq 3$ עם m צלעות ו-f פאות.
לפי משפט הפאון של אוילר

$$n - m + f = 2$$

נניח $f \geq 2$.
מכיוון שהגרף פשוט כל פאה תחומה ע"י לפחות 3 צלעות.
כל צלע תוחמת, תוחמת לפחות 2 פאות.
נסמן $\bar{m}$ מס' הצלעות התוחמות, אז

$$\frac{3f}{2} \leq \bar{m} \leq m$$

לכן

$$f \leq \frac{2}{3}m$$

נציב במשפט אוילר

$$\begin{aligned} 2 &= n - m + f \\ &\leq n - m + \frac{2}{3}m \\ &= n - \frac{1}{3}m \\ m &\leq 3n - 6 \end{aligned}$$

עבור $f = 1$ הגרף הוא עץ ומתקיים $m = n - 1$.

$$\begin{array}{rcl} n - 1 & \leq & 3n - 6 \\ & \Updownarrow & \\ n & \geq & 2.5 \end{array}$$

וזה מתקיים כי הנחנו $n \geq 3$.

מסקנה 2

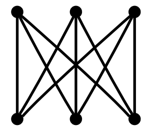
K_5 אינו מישורי.

הוכחה

מס' הקדקדים בK_5 הוא 5 ומס' הצלעות $m = 10$ ולא מתקיים $10 = m \leq 3n - 6 = 9$ לכן הגרף אינו מישורי.

תזכורת

$K_{3,3}$ הוא הגרף:



האם הגרף מישורי? לפי מסקנה 1, אם $K_{3,3}$ מישורי אז $m \leq 3n - 6$ וזה מתקיים. מכאן, אי אפשר להוכיח ש$K_{3,3}$ אינו מישורי ע"י מסקנה 1.

הגדרה

<u>מותן</u> (girth) של גרף פשוט הוא גודל המעגל המינימלי בגרף. (כלומר מותן של G שווה ל:

$$\min \{k \geq 3 \mid C_k \cong \text{subgraph of } G\}$$

נסמן $g(G)$.
אם G עץ נגדיר $g(G) = \infty$.

מסקנה 3

G גרף סופי פשוט קשיר מישורי מסדר n עם m צלעות ומותן $g < \infty$ אזי

$$\frac{g}{g-2}(n-2) \geq m$$

הוכחה

G מישורי. יהי f מס' הפאות בG.
כיוון ש$g < \infty$, $f \geq 2$, כלומר G אינו עץ.
כל פאה תחומה ע"י לפחות g צלעות. כל צלע תוחמת, תוחמת בדיוק שתי פאות. נסמן $\bar{m}$ מס' הצלעות התוחמות. מתקיים:

$$\frac{gf}{2} \leq \bar{m} \leq m$$

לכן

$$f \leq \frac{2}{g}m$$

נציב במשפט אוילר:

$$\begin{aligned}
2 &= n - m + f \\
&\leq n - m + \frac{2}{g}m \\
&= n - \frac{g-2}{g}m \\
\frac{g-2}{g}m &\leq n - 2 \\
m &\leq \frac{g}{g-2}(n-2)
\end{aligned}$$

מסקנה 4

$K_{3,3}$ לא מישורי - המותן שלו היא 4 (הגרף דו צדדי, אין מעגלים מאורך 3) ולא מתקיים

$$9=m\leq\frac{4}{2}\left(n-2\right)=2\cdot4=8$$

הגדרה

חלוקה אלמנטרית של גרף G היא הוספת קדקד חדש x והחלפת צלע $(u,\,v)$ בזוג צלעות $(u,\,x)$ ו$(v,\,x)$.
חלוקה של G היא גרף המתקבל מסדרה של חלוקות אלמנטריות.

משפט קורטובסקי

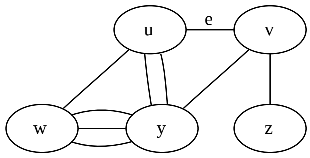
גרף G סופי אינו מישורי אמ"ם הוא מכיל תת-גרף איזומורפי לחלוקה של K_5 או $K_{3,\,3}$.

הגדרה

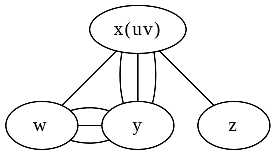
יהא G גרף, $e=(u,\,v)\in E\left(G\right)$.
נגדיר כיווץ של e בG:
G/e (הגרף המתקבל מכיווץ הצלע e - לא החסרת צלע) הוא הגרף שקב' קדקדיו $\left(V\left(G\right)\setminus\{u,\,v\}\right)\sqcup\{x_{uv}\}$, כלומר מחליפים את הקדקדים $u,\,v$ בקדקד אחד x_{uv}.
לכל שני קדקדים $w_1,\,w_2\in V\left(G\right)\setminus\{u,\,v\}$, $(w_1,\,w_2)$ צלע בG/e בריבוי k אמ"ם $(w_1,\,w_2)$ צלע בG בריבוי k.
לכל קדקד $w\in V\left(G\right)\setminus\{u,\,v\}$, $(x_{uv},\,w)$ צלע בG/e בריבוי m אם $(u,\,w)$ צלע בG בריבוי k ו$(v,\,w)$ צלע בG בריבוי ℓ ומתקיים $m=k+\ell$.

דוגמה

נכווץ את הצלע e בגרף הבא:



נקבל:



הגדרות

יהי G גרף.
גרף המתקבל כתוצאה מסדרת השמטת צלעות נקרא תת-גרף פורש.
גרף המתקבל כתוצאה מסדרת השמטת קדקדים נקרא תת-גרף מושרה.
גרף המתקבל כתוצאה מסדרת השמטת צלעות וקדקדים נקרא תת-גרף.
גרף המתקבל כתוצאה מסדרת השמטת צלעות וקדקדים וכיווצי צלעות נקרא <u>מינור</u>.

משפט וגנר

גרף סופי אינו מישורי אמ"ם יש לו מינור שאיזומורפי לK_5 או ל$K_{3,\,3}$.

הערה

משפט וגנר שקול למשפט קורטובסקי.

הגדרה

תכונה מונוטונית של גרפים היא תכונה הנשמרת תחת מינורים (השמטת צלעות וקדקדים וכיווץ צלעות)

דוגמאות

1. מישוריות
2. להיות יער
3. קשירות אינה מונוטונית.

השערת וגנר

לגרף יש תכונה מונוטונית אמ"ם אין לו מינור שאיזומורפי לתת גרף מתוך קבוצה סופית (של גרפים סופיים) כלשהי.
במילים אחרות, כל תכונה מונוטונית מוגדרת ע"י קבוצה סופית של מינורים אסורים.

דוגמה

1. מישוריות - המינורים האסורים הם $K_{3,3}$ וK_5.
2. יערים - C_3 (C_3 הוא כיווץ של כל מעגל).

משפט סימור-רוברטסון

השערת וגנר נכונה.