

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית (88-526)  
 שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ  
 סמסטר א', מועד ב': י"א בניסן תשס"ט (5.4.09)  
יש לנמק את כל התשובות.  
משך הבחינה: שעתיים וחצי.

- הבעיה הזו עוסקת בעקומות במרחב אוקלידי.
  - הגדר פרמטר במהירות יחידה של עקומה.
  - התבונן בעקומה  $\alpha(t) = (8 \cos t, 10 - 10 \sin t, -6 \cos t)$ . מצא פרמטר במהירות יחידה  $s$  של העקומה.
  - חשב את העקמומיות של העקומה בחלק ב'.
- הבעיה הזו עוסקת במשטחים במרחב אוקלידי. נניח ש  $g_{ij} = L_{ij} = 0$  אם  $i \neq j$ .
  - הגדר עקמומיות ראשיות  $k_1$  ו-  $k_2$ .
  - מצא בסיס מתאים ובטא את העתקת Weingarten בתור מטריצה.
  - בטא את היחס  $\frac{k_1}{k_2}$  כפונקציה במקדמים של תבניות יסודיות ראשונה ושניה.
  - חשב את המנה במקרה של משטח סיבוב המתקבל על-ידי סיבוב של פרבולה  $x = z^2 + \frac{1}{4}$  מסביב לציר  $z$ .
- בקואורדינטות  $(u^1, u^2) = (x, y)$ , תהי  $f(x, y) = \frac{2}{y}$ . התבונן במטריקה  $f(x, y)^2 (dx^2 + dy^2)$ .
  - חשב את המקדם  $\Gamma_{11}^1$  של המטריקה.
  - חשב את העקמומיות של גאוס כפונקציה  $K = K(x, y)$  של המטריקה.
- הבעיה הזו עוסקת במשטחים.
  - בטא את הביטוי  $\Gamma_{ij}^k$  באמצעות מקדמי המטריקה  $g_{ij}$ .
  - הוכח שהביטוי  $\frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^l x_l + L_{ij} n)$  הוא סימטרי ל- $j$  ול- $k$ . הסבר את היחס בין  $L_{ij}^k$  ו-  $L_{ji}^k$ .
  - בטא את הביטוי  $L_{i[j} L_{l]i}^k$  במונחים של מקדמי מטריקה ונגזרותיה.
- התבונן בטורוס  $T_0^2$  ב-  $\mathbf{R}^3$  עם פרמטריזציה  $x(\theta, \phi) = ((5 + \cos \phi) \cos \theta, (5 + \cos \phi) \sin \theta, \sin \phi)$ .
  - הגדר את הנורמה הסטאבילית  $\| \cdot \|$  בהומולוגיה של טורוס  $T^2$ .
  - חשב את המינימומים העוקבים  $\lambda_1$  ו-  $\lambda_2$  של  $H_1(T_0^2; \mathbf{Z})$  היחס לנורמה  $\| \cdot \|$ .
  - בטא את הפרמטר הקונפורמי  $\tau = \tau(T_0^2)$  במונחים של אינטגרל.
  - האם כל טורוס רימתי  $T^2$  שהוא שקול קונפורמי ל-  $T_0^2$  בהכרח מקיים  $sys_1(T^2)^2 \leq area(T^2)$ ? הסבר.

**בהצלחה!**