

תשובות לשאלות פתוחות תרגיל בית 5

(1) נסמן ב S_n ו T_n את סדרות הסכומים החלקיים של a_n ו a_{5n} בהתאמה. צריך להוכיח בעצם ש S_n חסומה מלעיל אם ורק אם T_n חסומה מלעיל. (כי עבור טור חיובי סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה ולכן היא מתכנסת אם ורק אם היא חסומה) ראשית נשים לב ש

$$T_n = a_5 + a_{10} + \dots + a_{5n} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{5n} = S_{5n}$$

לכן אם S_n חסומה אז גם T_n חסומה. מצד שני נניח ש T_n חסומה. אז

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

היות ש a_n חיובית מתקיים

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{5n-1}$$

היות ש a_n מונוטונית יורדת מתקיים -

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{5n} \leq 5a_1 + 5a_5 + \dots + 5a_{5n-5} = 5T_{n-1}$$

היות ש T_n חסומה גם S_n חסומה כנדרש.

(2) הטור הוא

$$\sum a_n k^n$$

כאשר

$$a_n = \frac{\prod_{m=1}^n 3m}{\left(\prod_{m=1}^n 3m+1\right)\left(\prod_{m=1}^n 3m+2\right)}$$

נשתמש במבחן דאלאמבר

$$\frac{a_{n+1}k^{n+1}}{a_n k^n} = k \frac{3n+3}{(3n+4)(3n+5)}$$

לא ממש משנה מה הערך של k . הסדרה הזאת מתכנסת ל 0 ולכן הטור מתכנס ללא תלות ב k .

הערה: אם k שלילי משתמשים במבחן דאלאמבר לטורים חיוביים ומגיעים לאותה תוצאה, כלומר הטור מתכנס בהחלט.