<u>פתרון תרגיל 9</u>

1. מצאו את מספר הפתרונות של המשוואות הבאות בקטע הנתון.

א) $x^4 + x^2 = 2$ בקטע $[0,2]$.

<u>פתרון</u>

תהי $f(x) = x^4 + x^2$. f רציפה ב $\mathbb{R}$ ולכן בפרט ב$[0,2]$ כפולינום. מתקיים $f(0) = 0 < 2 < f(2)$ ולכן ממשפט ערך הביניים קיימת נקודה $x_0 \in (0,2) \subseteq [0,2]$ כך ש $f(x_0) = 2$. לכן, למשוואה יש לפחות פתרון אחד. נראה שיש למשוואה בדיוק פתרון אחד. נניח בשלילה שקיימות שתי נקודות שונות $a < b$ בקטע $(0,2)$ כך ש $f(a) = f(b) = 2$ (שימו לב בקצוות לא מתקבל פתרון למשוואה). הפונקציה f בנוסף גזירה ב $\mathbb{R}$ כפולינום ולכן מתקיימים תנאי משפט רול (רציפות ב $[a,b]$, גזירות ב (a,b) והתנאי $f(a) = f(b)$), לכן קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש$f'(c) = 0$. מצד שני מתקיים $f'(x) = 4x^3 + 2x = x(4x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. מכיון ש $c \neq 0$(למה?) נקבל ש $f'(c) \neq 0$ בסתירה. לכן למשוואה קיים לכל היותר פתרון אחד ובסה"כ נסיק שלמשוואה בדיוק פתרון אחד.

ב) $e^x = 10x$ בקטע $[0,10]$.

<u>פתרון</u>

תהי $f(x) = e^x - 10x$ זוהי פונקציה גזירה ב $\mathbb{R}$ כהפרש גזירות ולכן גם רציפה ובפרט היא רציפה ב- $[0,10]$. $f(1) < 0$. $f(0) = 1 > 0$. נפצל את הקטע לשני תת קטעים $[0,1]$ ו- $[1,10]$. $f(10) = e^{10} - 100 > 0$ ולכן ממשפט ערך הביניים קיימת נקודה $x_0 \in (0,1)$ כך ש$f(x_0) = 0$. בצורה דומה מראים שקיימת נקודה $x_1 \in (1,10)$ כך ש$f(x_1) = 0$. לכן יש למשוואה לכל הפחות שני פתרונות. נראה שלא יתכנו 3 פתרונות או יותר ונסיק שיש בדיוק שני פתרונות. נניח בשלילה ש$a < b < c$ בקטע $[0,10]$ מקיימות $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. הפונקציה f רציפה ב רציפה ב $[a,b]$, גזירה ב (a,b) ומתקיים $f(a) = f(b)$ ולכן ממשפט רול

קיימת נקודה $t\in(a,b)$ כך ש $f'(t)=0$. בצורה דומה מסיקים שקיימת נקודה $z\in(b,c)$ כך ש $f'(z)=0$ וקיבלנו שתי נקודות שונות בקטע $[0,10]$ שבהן הנגזרת מתאפסת. נראה שהנגזרת מתאפסת בדיוק בנקודה אחת ונקבל סתירה. אכן, $f'(x)=e^x-10=0\Leftrightarrow x=\ln 10$.

לסיכום: למשוואה $e^x=10x$ בדיוק שני פתרונות בקטע $[0,10]$.

2. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,a]$, כך שמתקיים $f(a)=f(0)$. הוכיחו שקיים $x_0\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש- $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

__פתרון__

נתבונן בפונקציה $g(x)=f\left(x+\frac{a}{2}\right)-f(x)$. f רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ וכמו כן $f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כהרכבת רציפות ($x+\frac{a}{2}$ רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ ו f רציפה ב $\left[\frac{a}{2},a\right]$) לכן בסה"כ g רציפה ב $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כהפרש רציפות. בשל הנתון $f(a)=f(0)$ מתקיים:

$$g(0)=f\left(\frac{a}{2}\right)-f(0)$$

$$g\left(\frac{a}{2}\right)=f(a)-f\left(\frac{a}{2}\right)=f(0)-f\left(\frac{a}{2}\right)$$

נשים לב ש $g(0)=-g\left(\frac{a}{2}\right)$. אם $g(0)=-g\left(\frac{a}{2}\right)=0$ סיימנו שכן עבור $x_0=0$ נקבל הדרוש. אחרת, בהכרח 0 בין $g(0)$ ל $g\left(\frac{a}{2}\right)$

(כי הם שוני סימן) וממשפט ערך הביניים ביחס ל g ולקטע $\left[0,\frac{a}{2}\right]$

נקבל שקיימת $x_0 \in \left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש $g(x_0)=0$. מכאן נסיק ש

$f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

3. תהי $f(x)=\ln^2 x-5\ln x+6$. הוכיחו כי קיימת נקודה $e^2<c<e^3$ כך ש- $f'(c)=0$.

<u>פתרון</u>

$f(x)$ ודאי גזירה ב $\left(e^2,e^3\right)$ ורציפה ב $\left[e^2,e^3\right]$ (מדוע?) ומתקיים

$f(e^2)=f(e^3)=0$. נקבל מיידית ממשפט רול שקיימת נקודה

$e^2<c<e^3$ כך ש- $f'(c)=0$.

4. הוכיחו שלכל $x>y>0$ ו- $\alpha>1$ מתקיים $\alpha y^{\alpha-1}\left(x-y\right)<x^\alpha-y^\alpha<\alpha x^{\alpha-1}\left(x-y\right)$.

<u>פתרון</u>

יהיו $x>y>0$ ו- $\alpha>1$. הפונקציה $f(t)=t^\alpha$ גזירה ב $\mathbb{R}$ ולכן בפרט גזירה ב (y,x) ורציפה ב $[y,x]$. ממשפט הערך הממוצע של לגרנז' נקבל שקיימת נקודה $c\in\left(y,x\right)$ כך ש $f'(c)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

לכן, $\frac{x^\alpha-y^\alpha}{x-y}=\alpha c^{\alpha-1}$. מכיון ש $x>c>y>0$ ו- $\alpha>1$ נקבל ש $\alpha y^{\alpha-1}<\alpha c^{\alpha-1}<\alpha x^{\alpha-1}$ ולכן $\alpha y^{\alpha-1}<\frac{x^\alpha-y^\alpha}{x-y}<\alpha x^{\alpha-1}$. לאחר הכפלת אי השוויונים ב $x-y$ $(0<)$ נקבל ש $\alpha y^{\alpha-1}\left(x-y\right)<x^\alpha-y^\alpha<\alpha x^{\alpha-1}\left(x-y\right)$ כדרוש.

5. חשבו את הגבולות הבאים במובן הרחב .במידה והגבול לא קיים הסבירו מדוע.

א. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=\infty$. אכן, יהי $0<\varepsilon\approx 0$ אזי $\frac{1}{\sqrt[5]{\varepsilon}}$ אינסופי חיובי.

ב. $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=-\infty$. אכן, יהי $0>\varepsilon\approx 0$ אזי $\frac{1}{\sqrt[5]{\varepsilon}}$ אינסופי שלילי.

ג. $\nexists\lim_{x\to\infty}e^x\sin x$. אכן, עבור $H=2\pi N+\frac{\pi}{2}$ כאשר N היפר שלם אינסופי חיובי נקבל ש $e^H\sin(H)=e^H\cdot 1=e^H$ אינסופי חיובי. לעומת זאת עבור $H=2\pi N-\frac{\pi}{2}$ נקבל ש $e^H\sin(H)=e^H\cdot(-1)=-e^H$ אינסופי שלילי.

ד. $\nexists\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. אכן, עבור $\frac{1}{2\pi N}=\varepsilon\approx 0$ כאשר N היפר שלם אינסופי נקבל ש $\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\cos(2\pi N)=1\approx 1$. מצד שני עבור $\frac{1}{2\pi N+\frac{\pi}{2}}=\varepsilon\approx 0$ נקבל $\cos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\cos\left(2\pi N+\frac{\pi}{2}\right)=0\approx 0\neq 1$.

ה. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}=\infty$. ראשית, $\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}=\frac{1-x}{x^4}$. כעת, לכל $0\neq\varepsilon\approx 0$ מתקיים $1-\varepsilon$ סופי שאינו אינפי' חיובי וכמו כן ε^4 אינפי' חיובי ולכן $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^4}$ אינסופי חיובי.

ו. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$. אכן, לכל H אינסופי שלילי, $\sqrt{1-H}$ אינסופי חיובי. לכן $\frac{1}{\sqrt{1-H}}\approx 0$.

ז. $\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$. אכן, לכל $0\neq\varepsilon\approx 0$ $-1\leq\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\leq 1$ עפ"י כלל ההעברה ולכן $\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ סופי. מכאן $\varepsilon\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\approx 0$ כמכפלת סופי באינפי'.

6. א. הוכיחו :אם $\lim_{x\to c} f(x)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל x, אז $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

ב. אם נוריד את הדרישה של $f(x)>0$ לכל x האם עדיין הטענה תהיה נכונה? נמקו.

<u>פתרון</u>

א. יהי $c\neq a\approx c$. מהנתון $\lim_{x\to c} f(x)=0$ וכן $f(x)>0$ לכל x ולכן $0\approx f(a)>0$ (שילוב של הגדרת הגבול וכלל ההעברה).

מכאן, $\frac{1}{f(a)}$ אינסופי חיובי וזה מוכיח ש $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

ב. אם נוריד את הדרישה של $f(x)>0$ לכל x הטענה כבר אינה נכונה. כי יתכן שעבור $c\neq a\approx c$ $0\approx f(a)<0$ ואז $\frac{1}{f(a)}$ אינסופי שלילי. למשל: עבור $f(x)=-|x|$ מתקיים $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ו- $f(x)\leq 0$ לכל x אבל $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.