אלגברה לינארית 1 - תרגול 10 (מתמטיקה) 19-12-2010

משפט המימדים: (חשוב!)

יהיו $U,W\subseteq V$ תתי-מרחב, אזי: $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$

תרגיל 8.3 (עמ' 45)

ממימד 3   ממימד 4

יהא V ממימד 5; יהיו $U,W\subseteq V$ תתי-מרחבים ממימדים 3,4 בהתאמה.
מה הן האפשרויות עבור $\dim(U\cap W)$?

פתרון:

$$\dim(U+W)=7-\dim(U\cap W)$$

$$4\le\dim(U+W)\le 5 \rightarrow \dim(U\cap W)=\begin{cases}3 & U\subseteq W\\ 2 & U\not\subseteq W\end{cases}$$

$\dim(U+W)\overset{(ii)}{=}4$, $\dim(U\cap W)=3$, $\dim U=3 \Rightarrow U\cap W=U$

כי החיתוך מוכל ב-U וגם ב-W לפי משפט העזר מלמעלה

הסכום הוא ת"מ של V והוא התת"מ הקטן ביותר שמכיל את U ו-W.

תרגיל 8.5 (עמ' 45)

יהא V או ממימד n, ויהיו $U,W\subseteq V$ תתי-מרחבים כך ש- $\dim U=n-1$, $W\not\subseteq U$. הוכיחו: $U+W=V$.

פתרון:

משפט עזר: עבור שני ת"מ A,B אם מתקיים $A\subseteq B$ וגם $\dim A=\dim B$ אזי $A=B$.

משמע, היות ו $U+W\subseteq V$ (V מכיל את U+W), מספיק להוכיח $\dim(U+W)=\dim V$.

מתקיים: $\dim U \underset{(U\subseteq U+W)}{\le} \dim(U+W)\le\dim V \Leftarrow$

$n-1\le\dim(U+W)\le n$.

אם $\dim(U+W)=n$ ← סיימנו. נניח בשלילה ש- $\dim(U+W)=n-1$.

$$n-1=\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)\Rightarrow$$

$$\dim W=\dim(U\cap W)$$

תמיד מתקיים $U\cap W\subseteq W$ והיות והמימדים שווים, נקבל לפי משפט העזר ש- $W\cap U=W \Leftarrow W\subseteq U$ בסתירה לנתון.

החיתוך זה הקטן

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר

הגדרה:

יהא V מ"ו, $v\in V$ וקטור כלשהו. יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V.
אזי אם $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$ נכתוב $[v]_B=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$
ונקרא ל-$[v]_B=\vec{\alpha}$ "וקטור קואורדינטות של v בבסיס B".

דוגמא:

יהי $V=\mathbb{R}^2$ ונבחר שני בסיסים: $B=\{(0,1),(1,0)\}$, $C=\{(1,1),(2,3)\}$.
יהי $v=(0,-1)$. אזי: לפי B ← $v=-1(0,1)+0\cdot(1,0)=(0,-1)$ ⇐ $[v]_B=(-1,0)$
לפי C ← $v=2(1,1)-1(2,3)=(0,-1)$ ⇐ $[v]_C=(2,-1)$

הגדרה:

יהא V מ"ו ויהיו B,C שני בסיסים. נסמן: $B=\{v_1,\dots,v_n\}$.
אזי המטריצה

$$P_C^B=\underset{\text{(סימון)}}{[I]_C^B}\overset{\text{הגדרה}}{=}\begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_C & \cdots & [v_n]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

נקראת "מטריצת מעבר מבסיס C לבסיס B" ((מימין לשמאל)) והיא מקיימת:

$$P_C^B[v]_B=[v]_C$$

(זאת המטריצה היחידה שמקיימת זאת לכל $v\in V$)

דוגמא:

יהי $V=\mathbb{R}^2$ ונבחר שני בסיסים: $B=\{(1,2),(3,5)\}$, $C=\{(0,1),(1,0)\}$
נמצא את מטריצת המעבר P_C^B, P_B^C.

מטריצת מעבר מ-B ל-C

P_B^C: נייצג את הווקטורים של C בבסיס B:

$(0,1)=3\cdot(1,2)-1(3,5)\to[(0,1)]_B=(3,-1)$
$(1,0)=-5(1,2)+2(3,5)\to[(1,0)]_B=(-5,2)$

$$P_B^C=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$$

מטריצת מעבר מ-C ל-B

P_C^B: נייצג את הווקטורים של B בבסיס C:

$(1,2)=2\cdot(0,1)+1(1,0)\to[(1,2)]_C=(2,1)$
$(3,5)=5(0,1)+3(1,0)\to[(3,5)]_C=(5,3)$

$$P_C^B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$$

הסבר נוסף לגבי מטריצת מעבר →

★ שימו ♡ שמתקיים $P^C_B P^B_C = I$. מעבר זה נכון באופן כללי...

תרגיל 10.5 (עמ' 47)

יהא V או"מ ונניח שיש לו בסיס סטנדרטי S. יהא $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ בסיס אחר כלשהו של V.

(א) הוכיחו שהמטריצה P^B_S מקיימת $P^B_S[v]_B=[v]_S$ לכל $v\in V$ (בהרצאה)

(ב) יהיו $V=\mathbb{R}_2[x]$, $S=\{1,x,x^2\}$, $B=\{1,2-x,3x^2\}$. מצאו את המטריצה המקיימת $P[v]_B=[v]_S$ (כלומר את: P^B_S)

פתרון:

אנחנו מחפשים למעשה את המטריצה P^B_S, לכן עלינו לייצג את הווקטורים של B בבסיס S.

$$1 = 1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2 \rightarrow [1]_S=(1,0,0)$$
$$2-x = 2\cdot 1+(-1)\cdot x+0\cdot x^2 \rightarrow [2-x]_S=(2,-1,0)$$
$$3x^2 = 0\cdot 1+0\cdot x+3\cdot x^2 \rightarrow [3x^2]_S=(0,0,3)$$

$$\rightarrow P^B_S=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

(ג) עבור המקרה של הסעיף הקודם מצאו מטריצה המקיימת $P[v]_S=[v]_B$ (כלומר P^S_B)

פתרון:

ראינו (והוכחנו בהרצאה) שמתקיים $P^S_B\cdot P^B_S=I$. לכן אנחנו מחפשים כעת את המטריצה ההופכית של P^B_S מסעיף (ב):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&3&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&0\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{3}\end{array}\right)\rightarrow P^S_B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

(3) יהא $C=\{1+x^2,x+x^2,x^2\}$ בסיס נוסף ל-$\mathbb{R}_2[x]$. מצאו מטריצות המקיימות $Q[v]_C=[v]_S$, $A[v]_C=[v]_B$

פתרון: נייצג את הוקטורים של C לפי בסיס S:

$Q=P^C_S$: $[1+x^2]_S=(1,0,1)$, $[x+x^2]_S=(0,1,1)$, $[x^2]_S=(0,0,1)$

$$\rightarrow P^C_S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$A=P^C_B$: ראינו שמתקיים $P^S_B P^C_S=P^C_B$

$$\rightarrow P^C_B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל ממבחן 2009:</u>

יהיו $U,W \subseteq V$ שני ת"מ במרחב נוצר סופית V.

① הוכיחו שאם $\dim V < \dim U + \dim W$ אזי $U \cap W \neq \{0\}$.

② נניח שמתקיים $\dim(U+W) = \dim(U \cap W) + 1$. הוכיחו שאו $U \subseteq W$ או $W \subseteq U$.

<u>פתרון:</u>

① $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

נניח בשלילה $U \cap W = \{0\} \Rightarrow \dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow$ כי הסכום הוא ת"מ של V

$$\dim V \geq \dim(U+W) = \dim U + \dim W$$

אך, לפי הנתון $\dim U + \dim W > \dim V$ ולכן קיבלנו סתירה.

② $\dim(U \cap W) + 1 = \dim(U+W) = \dim U + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$$(*)\ 2\dim(U \cap W) + 1 = \dim U + \dim W$$

על מנת להראות את הדרוש מספיק להראות: (הסבר ב-** למטה)

$\dim(U \cap W) = \dim U$ $(U \subseteq W)$ או $\dim(U \cap W) = \dim W$ $(W \subseteq U)$

כבר ידוע שמתקיים: $\dim(U \cap W) \leq \dim U$, $\dim(U \cap W) \leq \dim W$ (כי החיתוך מוכל ב-U וגם ב-W)

לכן מספיק להראות שמתקיים:

$\dim(U \cap W) \geq \dim U$ או $\dim(U \cap W) \geq \dim W$

נניח בשלילה:

נניח ש- $\dim(U \cap W) < \dim U$ וגם $\dim(U \cap W) < \dim W$.

אזי $\dim(U \cap W) + 1 \leq \dim U$ וגם $\dim(U \cap W) + 1 \leq \dim W$

נחבר את שני האי-שוויונים:

$$2\dim(U \cap W) + 2 \leq \dim U + \dim W$$

סתירה ל-$(*)$.

(**) לכן: $\dim(U \cap W) = \dim U$ או $\dim(U \cap W) = \dim W$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$U \supseteq U \cap W \xrightarrow{\text{לפי משפט עזר}} U = U \cap W \rightarrow U \subseteq W$

$W \supseteq U \cap W \rightarrow W = U \cap W \rightarrow W \subseteq U$

תרגיל 11.14 (עמ' 48)

נתונה מע' משוואות הומוגנית $Ax=0$, ונתון שיש לה פתרון לא טריוויאלי. הוכיחו או הפריכו:
לכל מטריצה B למערכת $(AB)X=0$ יש פתרון לא טריוויאלי.

פתרון:

הפרכה:

למטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$ יש משתנה חופשי ← למע' $Ax=0$ יש ∞ פתרונות.
עם זאת, ניתן לבחור $B=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\\1&1\end{pmatrix}$ ונקבל:

$AB=\begin{pmatrix}1&3\\2&8\end{pmatrix} \longrightarrow$ למע' $ABx=0$ פתרון יחיד

שימו ♡, שאם A מטריצה ריבועית אזי הטענה נכונה:
יהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ול-$Ax=0$ יש פתרון לא טריוויאלי $\Leftarrow$ $rank(A)<n$.
$rank(AB)\le rank(A)<n \Leftarrow rank(AB)<n$ ולכן לפי טענה שהוכחנו ← קיים ל-$ABx=0$ פתרון לא טריוויאלי.

תרגיל 37.17 (עמ' 42)

יהא V מ"ו ותהי $B\subseteq V$ קבוצה. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
(א) B בסיס עבור V
(ב) $\vec{0}\notin B$ ולכל קבוצה $A\subseteq B$ מתקיים: $V=sp(A)\oplus sp(B\setminus A)$.

פתרון:

א $\Leftarrow$ ב: נבחר $A=\phi$ ונקבל $V=span(B)$ ולכן B פורשת.
נשאר להראות שהיא בת"ל. נניח בשלילה שהיא ת"ל. נסמן $B=\{v_1,\dots,v_n\}$.
אזי קיים $0\neq v\in B$ התלוי בכל השאר. נסמן בלי הגבלת הכלליות: $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_kv_k$.
נסמן $A=\{v\}$. $span(A)\cap span(B\setminus A)=\{0\}$ ← אבל, אבל $v\in span(B\setminus\{v\})$ ולכן זו סתירה $\Leftarrow$ B בת"ל $\Leftarrow$ B בסיס.

ב $\Leftarrow$ א:
B בסיס ולכן $\vec{0}\notin B$. יהי $A\subseteq B$ תת קבוצה ונסמן בה"כ $A=\{v_1,\dots,v_k\}$.

$$span(A)+span(B\setminus A)=span(A\cup(B\setminus A))=span(B)\underset{\text{כי }B\text{ בסיס}}{=}V$$

$span(A)\cap span(B\setminus A)=\{0\}$ כי אחרת קיים $v_i\in A$, $1\le i\le k$ כך ש- $v_i=\alpha_{k+1}v_{k+1}+\dots+\alpha_nv_n$ סתירה לכך ש-B בת"ל $\Leftarrow$ $V=span(A)\oplus span(B\setminus A)$