תרגיל 4

.1

(א) הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/_{\langle x^2 \rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{F}_2[x]}/_{\langle x^2-1 \rangle}$$

(ב) הוכיחו שהחוגים הבאים **לא** איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\langle x^2 \rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{Q}[x]}/_{\langle x^2-1 \rangle}$$

(ג) הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים

$$R = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/_{\langle xy-1 \rangle}, \qquad S = {}^{\mathbb{C}[x,y]}/_{\langle x^2+y^2-1 \rangle}$$

.2 אינו שעבור קבוצה X, אז $(P(X), \triangle, \cap)$ הוא חוג בוליאני. בתרגיל בית 1 הוכחתם שכל חוג בוליאני הוא חילופי. ננסה להוכיח את הכיוון ההפוך: כל חוג בוליאני A משוכן בחוג מן הצורה $(P(X), \triangle, \cap)$.

(א) הוכיחו שלכל $a \in A$ מתקיים $a + a = 0$ (ובפרט המאפיין של A הוא 2).

(ב) הוכיחו שהשדה היחיד שהוא גם חוג בוליאני הוא $\mathbb{F}_2$.

(ג) הוכיחו שלכל אידאל מקסימלי $A \lhd M$ מתקיים $A/M \cong \mathbb{F}_2$.

(ד) יהי $A \lhd M$ אידאל מקסימלי ויהי $a \in A$. הוכיחו כי $a \in M$ או $1 - a \in M$, אבל לא שניהם.

(ה) יהי $0 \neq a \in A$. הוכיחו שקיים אידאל מקסימלי $A \lhd M$ שאינו מכיל את a.

(ו) תהי X קבוצת כל האידאלים המקסימליים של A. הוכיחו שההעתקה $\varphi\colon A \to (P(X), \triangle, \cap)$ השולחת איבר $a \in A$ לקבוצת כל האידאלים המקסימליים שלא מכילים אותו היא שיכון של חוגים.

.3 יהי R חוג.

(א) יהיו $I, J \lhd R$ קו־מקסימליים. הוכיחו כי $I \cap J = IJ + JI$. (ממסקנה: בחוג קומוטטיבי נקבל $I \cap J = IJ$)

(ב) יהיו $I,J,K \lhd R$ כך ש-I,K קו־מקסימליים וגם J,K קו־מקסימליים. הראו כי גם IJ,K קו־מקסימליים.

(ג) הוכיחו באמצעות אינדוקציה על n את משפט השאריות הסיני ל-n אידאלים: יהי R חוג, ויהיו $I_1,\ldots,I_n \lhd R$ אידאלים קו־מקסימליים בזוגות. אזי

$$R/I_1\cap\cdots\cap I_n \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n.$$

הסיקו שעבור חוג חילופי R ואידאלים כנ"ל מתקיים

$$R/I_1\cdots I_n \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n.$$