תרגיל בית 1 אלגברה מופשטת 2

7 במרץ 2016

1. מי מהתת-קבוצות הבאות של $\mathbb{Q}$ הן תת-חוגים? (אם הקבוצה היא לא תת חוג- יש לתת הסבר קצר).

   (א) $\left\{\frac{a}{2b} \mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ (כאשר השבר כתוב בצורה מצומצמת).

   (ב) $\left\{\frac{a}{2b+1} \mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ (כאשר השבר כתוב בצורה מצומצמת).

   (ג) $\mathbb{Q}^+=\{q\in\mathbb{Q}\mid q\geq 0\}$

   (ד) $\left\{\frac{2a+1}{b} \mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ (כאשר השבר כתוב בצורה מצומצמת).

   (ה) $\mathbb{Q}^2=\{q^2\mid q\in\mathbb{Q}\}$

2. תהי $\{S_i\}_{i\in I}$ קבוצה של תת חוגים (לאו דוקא סופית או בת-מניה) של חוג R. הוכיחו כי החיתוך $\bigcap_{i\in I} S_i$ הוא גם תת-חוג.

3. נתבונן בחוג $C[0,1]$ של פונקציות ממשיות רציפות ב$[0,1]$.

   (א) האם הוא חוג עם חילוק? תחום?

   (ב) תהי פונקציה $f\in C[0,1]$ המתאפסת על מספר בן מנייה של איברים, האם היא הפיכה? מחלקת אפס?

   (ג) האם אוסף הפולינומים מעל הממשיים $\mathbb{R}[x]$ היא תת-חוג?

4. יהי R חוג. איבר $x\in R$ המקיים $x^n=0$ לאיזשהו $n\in\mathbb{N}$ נקרא איבר נילפוטנטי.

   (א) וודאו לעצמכם: נילפוטנטים הם מחלקי אפס. האיבר הנילפוטנטי היחיד בתחום הוא 0.

(ב) הוכיחו עבור חוג קומוטטיבי R כי אם $x \in R$ נילפוטנטי, אז rx נילפוטנטי לכל $r \in R$. תנו דוגמא נגדית עבור חוג לא קומוטטיבי.

(ג) הוכיחו כי אם $x \in R$ נילפוטנטי, אז $1-x$ הפיך.
(רמז : השתמשו ב $(1-x)\left(1+x+x^2+\dots\right)$).

(ד) הוכיחו כי אם $x \in R$ נילפוטנטי, $y \in R$ הפיך ו$xy = yx$ אז $x + y$ הפיך.

5. יהי חוג $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{Z} \right\}$. הוכח שכל איבריו נילפוטנטים מסדר 2 (כלומר $x^2 = 0$ לכל $x \in R$) אבל הוא אינו קומוטטיבי.

6. יהי R חוג. ויהיו איברים $x, y \in R$ כך ש $xy = 1$ אבל $yx \neq 1$. הוכיחו כי קיים איבר $0 \neq z \in R$ כך ש $xz = zy = 0$.

7. יהי R חוג המקיים שכל איבריו הם אידמפוטנטים, כלומר $\forall x \in R,\ x^2 = x$ (חוג כזה נקרא בוליאני). הוכח שבחוג כזה מתקיים $x + x = 0$ לכל $x \in R$, ושהוא קומוטטיבי.