

דגבר נציאביליות

נאמר ש- f דגבר נציאביליות בנקודה $a = (x_0, y_0)$
אם אפשר להציג אותה בצורה הבאה:

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + \varepsilon \|(h_1, h_2)\|$$

~~אם אפשר~~ כאשר $\varepsilon \rightarrow 0$.

תנאי מספיק לדגבר נציאביליות: אם f סקלרית $(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$
הציבה בסביבת נקודה x_0 אם f דגבר נציאביליות
אם קיימות הנגזרות החלקיות של f בסביבת
נקודה זו והן רציפות בה.

התרגיל - האם $(0,0) \neq (x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{אם } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

דגבר נציאביליות ב- $a = (0,0)$?

פתרון - קודם כל נזכר במשפט שאם f דגבר נציאביליות
בנקודה אז היא גם רציפה בה.

לכן נבדוק שאכן f רציפה בנקודה $a = (0,0)$:

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2}} \right| = |y| \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

כלומר $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ ולכן היא רציפה ב- $(0,0)$.

נמצא עכשיו נגזרות חלקיות באקוויזה a :
 נגזרת לפי x : $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} - xy \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(\sqrt{x^2+y^2}) - xy \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

זה נכון לכל y (באזירה לפי x הוא קבוע) ולכן זה נכון בפרט עבור $y=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \frac{0 \cdot \sqrt{x^2+0} - 0 \cdot \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+0}}}{x^2+0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

באותו אופן גם מראים ש- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

זה לא אומר שהנגזרות רציפות

בעצם ניסינו בתחילת דהראות שכן רציפות אבל לא עשינו
 קו לא... זה לא היה לנו עם ...

איך הכל זאת נפתור את התסביל?

נשתמש בהשערה המקורית לציפון ציאה'ל'ונה
 אם df_a (הציפון ציאה'ל'ונה) קיים אז הוא מקיים:

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h)$$

$$f(0+h_1, 0+h_2) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot h_2 + o(h)$$

$$df_a(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) h = 0$$

אזכורנו מוגדר לציפון ציאה'ל'ונה:

